Koordinaatit

Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$. Jos $\bar{v} \in V$, niin

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$$

joillakin $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$. Vektorin $\bar{v}$ *koordinaattivektori* kannan S suhteen on

$$[\bar{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan vektoria $\bar{v} = [3\ 0]^T \in \mathbb{R}^2$.

- Vektorin $\bar{v}$ koordinaattivektori luonnollisen kannan $E = \{[1\ 0]^T, [0\ 1]^T\}$ suhteen on

$$[\bar{v}]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Vektorin $\bar{v}$ koordinaattivektori kannan $S = \{[1\ 2]^T, [1\ \ -1]^T\}$ suhteen on

$$[\bar{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sillä $\bar{v} = [2\ 1]^T + 2[1\ \ -1]^T$.

Kuvauksen matriisi

- Olkoon $L\colon V \to V'$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että S on avaruuden V kanta ja S' on avaruuden V' kanta.

- Lineaarikuvauksen L matriisi kantojen S ja S' suhteen on matriisi B, jolle pätee
$$B[\bar{v}]_S = [L(\bar{v})]_{S'}.$$

- Matriisilla kertominen antaa siis kuvauksen arvot, mutta nyt kaikki vektorit on kirjoitettu kantojen S ja S' suhteen.

- Luentomateriaalissa tätä matriisia merkitään $M(L; S' \leftarrow S)$.

Harjoituksen 5 tehtävässä VI tutkittiin lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\bar{x}) = [x_1 + 2x_2 \quad 4x_1 + 3x_2]^T$.

- Sen matriisi luonnollisten kantojen suhteen on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Jos lähtö- ja maaliavaruudessa käytetäänkin kantaa $S = \{[1\ 2]^T, [1\ \ -1]^T\}$, saadaan kuvauksen matriisiksi

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyt pätee siis $B[\bar{v}]_S = [L(\bar{v})]_S$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.

- Huomaa, että molemmat matriisit antavat saman kuvauksen.

- Harjoituksen 5 tehtävästä VI nähdään, kuinka lineaarikuvauksen matriisi muodostetaan.

- Tehtävässä käytetään sekä lähtö- että maaliavaruudessa kantaa S. Matriisin sarakkeiksi tulevat kannan S vektoreiden kuvat kannan S suhteen kirjoitettuina.

- Katso yleinen tapaus luvusta 4.3.

Yhteys diagonalisointiin

- Edellisessä esimerkissä saatiin kannan S suhteen lävistäjämatriisi.

- Tulimme siis diagonalisoineeksi luonnollisen kannan suhteen kirjoitetun matriisin.

- Huomaa, että kanta S koostuu ominaisvektoreista ja siksi sen suhteen kirjoitettu matriisi on lävistäjämatriisi.

Kannanvaihtomatriisi

- Vektorin $\bar{v} \in V$ koordinaattivektorin voi selvittää ratkaisemalla yhtälöryhmän.

- Koordinaattivektorin selvittämiseen voi käyttää myös niin kutsuttua kannanvaihtomatriisia.

- Jos S ja T ovat kaksi avaruuden V kantaa, on olemassa matriisi P, jolle pätee
$$P[\bar{v}]_S = [\bar{v}]_T.$$

- Lisää tietoa kannanvaihtomatriiseista löytyy luvusta 2.8.

- Kannanvaihtomatriiseja voi käyttää myös siihen, että muuttaa kuvauksen matriisin kannasta toiseen.

- Tutkitaan esimerkiksi lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

- Olkoot S ja T avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantoja. Olkoon P kannanvaihtomatriisi kannasta T kantaan S.

- Olkoon A kuvauksen matriisi kannnan S suhteen ja B kuvauksen matriisi kannan T suhteen.

- Tällöin $P^{-1}AP = B$.

- Eri kantojen suhteen kirjoitetut matriisit ovat siis similaariset.