Diagonalisointi

1 Määritelmä. Matriisit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ovat *similaariset* (tai similaarit), jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jolle pätee $P^{-1}AP = B$.

Similaariset matriisit muistuttavat toisiaan monessa suhteessa. Niillä on esimerkiksi sama determinantti ja samat ominaisarvot.

2 Määritelmä. Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on *diagonalisoituva*, jos A on similaarinen jonkin lävistäjämatriisin kanssa. Toisin sanoen on olemassa kääntyvä matriisi P ja lävistäjämatriisi D, joille pätee $P^{-1}AP = D$.

3 Lause. *Matriisi* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on diagonalisoituva jos ja vain jos* A*:lla on* n *lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.*

Lauseen todistus:

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että $P^{-1}AP = D$, missä D on lävistäjämatriisi. Nyt $AP = PD$. Olkoot P:n sarakkeet $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ ja D:n lävistäjäalkiot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Huomataan, että

$$AP = A[\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n] = [A\bar{p}_1 \cdots A\bar{p}_n]$$

ja toisaalta

$$PD = [\lambda_1 \bar{p}_1 \cdots \lambda_1 \bar{p}_n].$$

Koska $AP = PD$, saadaan $A\bar{p}_i = \lambda_i \bar{p}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siis jokainen λ_i on ominaisarvo ja $\bar{p}_i$ sitä vastaava ominaisvektori.

Koska P on kääntyvä, yhtälöllä $P\bar{x} = \bar{0}$ on lauseen 1.6.5 mukaan täsmälleen yksi ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten matriisin P sarakkeiden joukko on vapaa eli lineaarisesti riippumaton.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ ovat jotkin A:n toisistaan riippumattomat ominaisvektorit. Olkoot niitä vastaavat ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nyt $A\bar{p}_i = \lambda_i \bar{p}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Merkitään $P = [\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n]$. Olkoon D lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Tällöin nähdään samaan tapaan kuin edellä, että $AP = PD$.

Koska matriisin P sarakkeet ovat toisistaan riippumattomat, on yhtälöllä $P\bar{x} = \bar{0}$ täsmälleen yksi ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten matriisi P on kääntyvä.

Näin ollen lause on todistettu.

Todistuksesta nähdään, miten matrisiit P ja D löydetään. Matriisin P sarakkeiksi voidaan valita jotkin lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit ja matriisin D lävistäjäalkiot ovat näitä ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot.

4 Esimerkki. Esimerkissä 6.1.10 c) osoitettiin, että matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ovat 4 ja -1. Näitä vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} t \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s, \quad \text{missä } t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Huomataan, että ominaisvektoriesta esimerkiksi vektorit

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumattomat. (Vektorit eivät nimittäin ole yhdensuuntaiset.)

Siis $P^{-1}AP = D$, missä

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5 Esimerkki. Esimerkissä 6.1.10 a) osoitettiin, että matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

aino ominaisarvo on 2. Tätä ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nähdään, että matriisilla A ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisarvoa. Siten matriisi ei ole diagonalisoituva.

Sovellus: Jos matriisi on diagonalisoituva, sen potenssit on helppo laskea.

Tutkitaan vielä esimerkin 4 matriisia A ja lasketaan potenssi A^{20}. Huomataan, että $A = PDP^{-1}$ ja

$$A^{20} = (PDP^{-1})^{20} = PD^{20}P^{-1}.$$

Viimeinen välivaihe seuraa siitä, että $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tämä osoitetaan induktiolla, mutta asiasta on melko helppo vakuuttua kokeilemalla muutamia potensseja.

Lisäksi

$$D^{20} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{20} = \begin{bmatrix} 4^{20} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}.$$

Tämäkin tulos osoitetaan induktiolla.

Nyt

$$A^{20} = PD^{20}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{20} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \cdot 4^{20} - 3 & -2 \cdot 4^{20} + 2 \\ -3 \cdot 4^{20} + 3 & -3 \cdot 4^{20} - 2 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että $P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ja P on kääntyvä matriisi.

Väite: $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \dots\}$

Todistus: 1. Alkuaskel: Huomataan, että

$$(PDP^{-1})^1 = PDP^{-1} = PD^1P^{-1},$$

joten väite pätee, kun $k = 1$.

2. Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee luvulla k, ja osoitetaan, että se pätee luvulla $k + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}(PDP^{-1})^{k+1} &= (PDP^{-1})^k(PDP^{-1}) = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.\end{aligned}$$

Siten väite pätee luvulla $k + 1$.

Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu.