

Millainen on hyvä todistus?

- Kirjoita tarvittavat oletukset todistuksen alkuun.
- Määrittele kaikki käyttämäsi symbolit.
- Kirjoita hyvää ja selkeää kieltä. Kannattaa kirjoittaa kokonaisia lauseita.
- Totea lopuksi, mitä osoitit.

Todistus 1

Väite: Jos neliömatriisilla matriisilla A on käänteismatriisi, käänteismatriiseja on vain yksi.

Todistus: Olkoon A neliömatriisi, jolla on käänteismatriisi B . Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että myös B' on matriisin A käänteismatriisi ja $B' \neq B$. Nyt halutaan päätyä ristiriitaan ja osoittaa vastaoletus vääräksi. Tällöin väite on todistettu.

Huomataan, että

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B.$$

Tämä on ristiriita vastaoletuksen kanssa sillä oletimme, että $B \neq B'$. Siten vastaoletus on väärä. Tästä seuraa, että matriisilla A on vain yksi käänteismatriisi.

Todistus 2

Väite: Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Tällöin $(AB)^T = B^T A^T$.

Todistus: Todetaan ensin, että matriisit $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ovat samankokoiset. Huomataan, että $AB \in \mathbb{R}^{m \times l}$, joten $(AB)^T \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Toisaalta $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ja $B^T \in \mathbb{R}^{l \times n}$, joten $B^T A^T \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Siten matriisit ovat samankokoiset.

Osoitetaan sitten, että matriisien $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ kaikki alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} ((AB)^T)(i, j) &= (AB)(j, i) = \sum_{k=1}^n A(j, k)B(k, i) = \sum_{k=1}^n A^T(k, j)B^T(i, k) \\ &= \sum_{k=1}^n B^T(i, k)A^T(k, j) = (B^T A^T)(i, j). \end{aligned}$$

Siten matriisien $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ kaikki alkiot ovat samoja. On siis osoitettu, että $(AB)^T = B^T A^T$.