5. DETERMINANTIT

Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Jos 2-rivinen determinantti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

on $\neq 0$, on 2×2-matriisi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ säännöllinen ja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{(totea laskemalla!).}$$

Tässä luvussa määrittelemme yleisesti n-riviset determinantit ja johdamme mm. vastaavan "lausekkeen" säännöllisen $n \times n$-matriisin käänteismatriisille.

5.0 Permutaatiot

Aloitamme esittämällä permutaatioista ja niiden etumerkistä jatkossa tarvittavat asiat. Tämä aihepiiri ei varsinaisesti kuulu lineaarialgebraan.

Olkoon $n \in \{1, 2, 3, \dots, \}$ positiivinen kokonaisluku ja $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Tarkastellaan joukkoa

$$S_n = \{\sigma \mid \ \sigma \text{ on bijektio } J_n \to J_n\},$$

jonka alkioita (so. bijektioita $\sigma : J_n \to J_n$) kutsutaan joukon J_n *permutaatioiksi*. Jos $\sigma \in S_n$ ja merkitään $k_i = \sigma(i)$ $(i = 1, \dots, n)$, niin jonossa $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ esiintyy jokainen luvuista $1, 2, \dots, n$ täsmälleen yhden kerran; kääntäen, jokaista tällaista jonoa $(k_1, \dots, k_n)$ vastaa permutaatio σ, jolla $\sigma(i) = k_i$ $\forall i$. Usein samastetaan

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

Joukon S_n alkioiden lukumäärä on $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. ("Todistus": $\sigma(1)$:lle on n mahdollisuutta, $\sigma(2)$:lle $n-1$ jne.).

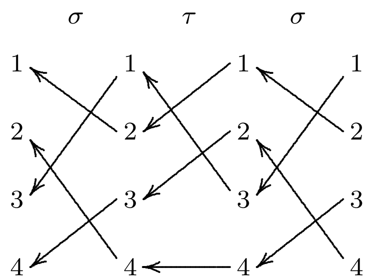
Selvästi

$$\begin{aligned} &\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathrm{J_n}} = (1, 2, \dots, n) \in S_n; \\ &\sigma, \tau \in S_n \implies \sigma \circ \tau \in S_n \quad \text{(yhdistetty kuvaus);} \\ &\sigma \in S_n \implies \sigma^{-1} \in S_n \quad \text{(käänteiskuvaus).} \end{aligned}$$

Sanomme, että yhdistetty kuvaus $\sigma \circ \tau$ on permutaatioiden $\sigma, \tau \in S_n$ *tulo*. (Itse asiassa $(S_n, \circ)$ on ryhmä, ns. n:s *symmetrinen ryhmä*, ks. Algebra I.)

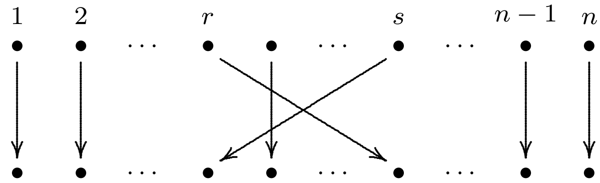
Esimerkki 5.0.1. Permutaatioilla $\sigma = (3,1,4,2) \in S_4$ ja $\tau = (2,3,1,4) \in S_4$ on

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau &= (1,4,3,2) \\ \tau \circ \sigma &= (1,2,4,3) \\ \sigma^{-1} &= (2,4,1,3) \\ \tau^{-1} &= (3,1,2,4). \end{aligned}$$



Tässä erityisesti $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

Permutaatio $\tau \in S_n$ on *vaihdos* eli *transpositio*, jos on olemassa $r, s \in J_n$, $r \neq s$, joilla $\tau(r) = s$, $\tau(s) = r$ ja $\tau(i) = i \ \forall i \in J_n \setminus \{r, s\}$; siis τ vaihtaa alkiot $r, s \in J_n$, mutta pitää muut $i \in J_n$ paikallaan.



Äskeistä vaihdosta τ merkitään $\tau = (r|s)$ $(= (s|r))$. Usein merkitään myös $(r|r) = \mathrm{id}$ $(r \in J_n)$; $(r|r)$ **ei** ole vaihdos.

Jos $\tau \in S_n$ on vaihdos, niin $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$ eli $\tau^{-1} = \tau$.

Lause 5.0.2. *Jos $\sigma \in S_n$, on olemassa sellaiset vaihdokset $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \in S_n$, että*

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p.$$

(Sopimus: $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p = \mathrm{id}$, jos $p = 0$.)

Todistus. Saadaan jopa *laskumenetelmä*: Jos $n = 1$, on $\sigma = \mathrm{id}$ ja asia on selvä ($p = 0$ käy).

Jos $n \geq 2$, merkitään $k_n = \sigma(n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $\sigma_n = (k_n|n) \circ \sigma$. Tällöin $\sigma = (k_n|n) \circ \sigma_n$ ja $\sigma_n(i) = i$, kun $i = n$.

Jos $n \geq 3$, merkitään $k_{n-1} = \sigma_n(n-1) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ($\sigma_n(i) < n$, kun $i < n$, koska $\sigma_n(i) \neq \sigma_n(n) = n$) ja $\sigma_{n-1} = (k_{n-1}|n-1) \circ \sigma_n$. Tällöin $\sigma_{n-1}(i) = i$, kun $i = n-1$ tai n, ja $\sigma = (k_n|n) \circ \sigma_n = (k_n|n) \circ (k_{n-1}|n-1) \circ \sigma_{n-1}$.

Jatketaan näin (jos $n \geq 4$). Lopputulos:

$$\sigma = (k_n|n) \circ (k_{n-1}|n-1) \circ \cdots \circ (k_2|2) \circ \sigma_2,$$

$k_j = \sigma_{j+1}(j) \in \{1, 2, \ldots, j\}$ ja $\sigma_2(i) = i$, kun $i = 2, 3, \ldots, n$; siis myös $\sigma_2(1) = 1$, joten $\sigma_2 = \mathrm{id}$. On saatu esitys

$$\sigma = (k_n|n) \circ (k_{n-1}|n-1) \circ \cdots \circ (k_2|2). \quad \square$$

Saadussa esityksessä $\sigma = (k_n|n) \circ \cdots \circ (k_2|2)$ voi olla vaihdoksia alle $n-1$ kappaletta; voi nimittäin olla $k_j = j$ joillakin j.

Esimerkki 5.0.3. Olkoon $\sigma = (3,1,4,2) \in S_4$. Tällöin

$$\begin{array}{lll} k_4 = \sigma(4) = 2, & \sigma_4 = (2|4) \circ \sigma = (3,1,2,4), & \sigma = (2|4) \circ \sigma_4; \\ k_3 = \sigma_4(3) = 2, & \sigma_3 = (2|3) \circ \sigma_4 = (2,1,3,4), & \sigma_4 = (2|3) \circ \sigma_3; \\ k_2 = \sigma_3(2) = 1, & \sigma_2 = (1|2) \circ \sigma_3 = \mathrm{id}, & \sigma_3 = (1|2). \end{array}$$

Siispä $\sigma = (2|4) \circ (2|3) \circ (1|2)$. $\square$

Permutaation esitys vaihdosten tulona kuten 5.0.2:ssa ei ole yksikäsitteinen; esimerkiksi S_3:ssa on $(1|2) = (1|3)(2|3)(1|3)$. Kuitenkin pätee

Lause 5.0.4. *Jos S_n:ssä on $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \cdots \circ \tau_q'$, missä τ_1, τ_2, ... , τ_p, τ_1', τ_2', ... , τ_q' ovat vaihdoksia, niin*

$$(-1)^p = (-1)^q,$$

ts. p ja q ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

Ennen 5.0.4:n vaikeahkoa todistusta esitämme muutamia sen seurauksia:

Seuraus ja määritelmä 5.0.5. *Olkoon $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p \in S_n$, missä τ_1, τ_2, ... , τ_p ovat vaihdoksia. Tällöin σ:n* etumerkki

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^p \in \{-1, 1\}$$

riippuu vain σ:sta, ei esityksen $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ valinnasta. Jos $\epsilon(\sigma) = 1$, σ on parillinen*; jos $\epsilon(\sigma) = -1$, σ on* pariton. $\square$

Selvästi $\epsilon(\mathrm{id}) = 1$ $(p = 0)$, ja $\epsilon(\tau) = -1$, jos τ on vaihdos $(p = 1)$.

Lause 5.0.6. *Jos $\sigma, \sigma' \in S_n$, niin $\epsilon(\sigma \circ \sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ ja $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$.*

Todistus. Esitetään σ ja σ' vaihdosten tuloina: $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$, $\sigma' = \tau_1' \circ \cdots \circ \tau_q'$. Tällöin $\sigma \circ \sigma'$:lle saadaan esitys

$$\sigma \circ \sigma' = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p \circ \tau_1' \circ \cdots \circ \tau_q'$$

vaihdosten tulona, joten

$$\epsilon(\sigma \circ \sigma') = (-1)^{p+q} = (-1)^p(-1)^q = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma').$$

Erityisesti

$$\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \epsilon(\mathrm{id}) = 1;$$

koska $\epsilon(\sigma), \epsilon(\sigma^{-1}) \in \{-1, 1\}$, täytyy olla $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$. $\square$

Esimerkki 5.0.7. S_3:n alkioiden etumerkit:

$$\begin{aligned}
\sigma = (1,2,3) &= \mathrm{id} & \Longrightarrow \qquad \epsilon(\sigma) &= (-1)^0 = 1\\
(2,1,3) &= (1|2) & (-1)^1 &= -1\\
(3,2,1) &= (1|3) & (-1)^1 &= -1\\
(1,3,2) &= (2|3) & (-1)^1 &= -1\\
(2,3,1) &= (1|3)\circ(1|2) & (-1)^2 &= 1\\
(3,1,2) &= (2|3)\circ(1|2) & (-1)^2 &= 1. \quad \square
\end{aligned}$$

5.0.4:n todistusta varten esitetään aluksi seuraava konstruktio:
Olkoot X ja Y joukkoja,

$$X^n = X \times \cdots \times X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X \text{ kaikilla } i \in J_n\}$$

karteesinen tulo ja $F : X^n \to Y$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(x_1, \ldots, x_n)$, jokin kuvaus. Kun $\sigma \in S_n$, määritellään kuvaus $\sigma F : X^n \to Y$ asettamalla

$$(\sigma F)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \quad \text{kaikilla } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n.$$

Lemma 5.0.8. *Olkoot $\sigma, \tau \in S_n$. Tällöin $\sigma(\tau F) = (\sigma \circ \tau)F$.*

Todistus. Olkoon $x_i \in X$ ja $x'_i = x_{\sigma(i)}$ kaikilla $i \in J_n$. Silloin

$$\begin{aligned}
(\sigma(\tau F))(x_1, \ldots, x_n) &= (\tau F)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (\tau F)(x'_1, \ldots, x'_n)\\
&= F(x'_{\tau(1)}, \ldots, x'_{\tau(n)}) = F(x_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(n))})\\
&= F(x_{(\sigma\circ\tau)(1)}, \ldots, x_{(\sigma\circ\tau)(n)}) = ((\sigma \circ \tau)F)(x_1, \ldots, x_n). \quad \square
\end{aligned}$$

Valitaan nyt erityisesti $X = Y = \mathbb{R}$ ja

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \quad (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}).$$

(Jos $n = 1$, tulkitaan, että F on vakio 1.)

Lemma 5.0.9. *Jos $\tau \in S_n$ on vaihdos, on $\tau F = -F$.*

Todistus. Olkoon $\tau = (r|s)$, missä $1 \le r < s \le n$. Kun $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on

$$
\begin{aligned}
(\tau F)(x_1, \ldots, x_n) &= F(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = \prod_{i<j} (x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)}) \\
&= (x_{\tau(s)} - x_{\tau(r)}) \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \{i,j\}\cap\{r,s\}=\emptyset}} (x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)}) \\
&\quad \cdot \prod_{s<j} (x_{\tau(j)} - x_{\tau(s)})(x_{\tau(j)} - x_{\tau(r)}) \\
&\quad \cdot \prod_{r<j<s} (x_{\tau(s)} - x_{\tau(j)})(x_{\tau(j)} - x_{\tau(r)}) \\
&\quad \cdot \prod_{j<r} (x_{\tau(s)} - x_{\tau(j)})(x_{\tau(r)} - x_{\tau(j)}) \\
&= -\prod_{i<j} (x_j - x_i) = -F(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

sillä

$$
\begin{aligned}
& x_{\tau(s)} - x_{\tau(r)} = x_r - x_s = -(x_s - x_r), \\
& i < j \text{ ja } \{i,j\} \cap \{r,s\} = \emptyset \implies x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)} = x_j - x_i, \\
& s < j \implies (x_{\tau(j)} - x_{\tau(s)})(x_{\tau(j)} - x_{\tau(r)}) = (x_j - x_r)(x_j - x_s) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (x_j - x_s)(x_j - x_r), \\
& r < s < j \implies (x_{\tau(s)} - x_{\tau(j)})(x_{\tau(j)} - x_{\tau(r)}) = (x_r - x_j)(x_j - x_s) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (x_s - x_j)(x_j - x_r), \\
& j < r \implies (x_{\tau(s)} - x_{\tau(j)})(x_{\tau(r)} - x_{\tau(j)}) = (x_r - x_j)(x_s - x_j) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (x_s - x_j)(x_r - x_j). \quad \square
\end{aligned}
$$

5.0.4:n todistus. Merkitään $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p = \tau_1' \circ \cdots \circ \tau_q'$. Olkoon F kuten 5.0.9:ssä. Silloin

$$
\begin{aligned}
\sigma F &= (\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p) F \overset{5.0.8}{=} (\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{p-1})(\tau_p F) \overset{5.0.9}{=} (\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{p-1})(-F) \\
&= -[(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{p-1}) F] = \cdots = (-1)^p F,
\end{aligned}
$$

ja samoin $\sigma F = (\tau_1' \circ \cdots \circ \tau_q') F = (-1)^q F$. Siten $(-1)^p F = (-1)^q F$. Erityisesti

$$(-1)^p F(1, 2, \ldots, n) = (-1)^q F(1, 2, \ldots, n).$$

Koska $F(1, 2, \ldots, n) \neq 0$, on $(-1)^p = (-1)^q$. $\square$

5.1 Determinanttifunktion konstruktio

Olkoon $n \geq 1$. Seuraavassa esiintyvän joukon

$$(\mathbb{R}^n)^n = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = \{(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \mid \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n\}$$

alkiot ovat sarakevektorien järjestettyjä n-jonoja.

Määritelmä 5.1.1. Kuvaus $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}^n$:n *determinanttifunktio*, jos

i) jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja kiinteillä $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ kuvaus $\mathbf{a}_i \mapsto D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$ on lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

ii) $D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = 0$, jos $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i+1}$ jollakin $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$;

iii) $D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

($(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta kuten tavallisesti.)

Huomautus 5.1.2. Ehto i), D:n *multilineaarisuus*, merkitsee sitä, että

$$D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{ja}$$

$$D(\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

kun $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_i \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tässä siis D:n *yhdessä* argumentissa esiintyy summa tai skalaarilla kertominen. Jos useammassa argumentissa esiintyy laskutoimituksia, vastaavia kaavoja on käytettävä useampaan kertaan. Näin esimerkiksi

$$D(c\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_n) = c^n D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Esimerkki 5.1.3. a) $D_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_1(a) = a$, on determinanttifunktio avaruudessa $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

b) Kaava

$$D_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

($\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$) määrittelee determinanttifunktion $D_2 : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$.

Lause 5.1.4. *Olkoon $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ determinanttifunktio, $\sigma \in S_n$ permutaatio ja $\epsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ σ:n etumerkki. Tällöin $\sigma D = \epsilon(\sigma)D$, ts. kaikilla $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ on*

$$D(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Todistus. Erikoistapaus: Olkoon $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ja $\sigma = (i|i+1)$ "alkeisvaihdos". Tällöin on kaikilla $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
0 &\overset{5.1.1\,\text{ii}}{=} D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&\overset{5.1.1\,\text{i}}{=} D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&\qquad + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&\overset{5.1.1\,\text{ii}}{=} D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n),
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}(\sigma D)(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n) &= D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_n)\\ &= -D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_{i+1},\ldots,\mathbf{a}_n) = \epsilon(\sigma)D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_{i+1},\ldots,\mathbf{a}_n).\end{aligned}$$

Yleinen tapaus: Olkoon $\sigma \in S_n$. 5.0.2:n mukaan σ on vaihdosten tulo. Kun $r < s$, on

$$\begin{aligned}(r|s) =&(s-1|s)\circ(s-2|s-1)\circ\cdots\circ(r+1|r+2)\circ(r|r+1)\\ &\circ(r+1|r+2)\circ\cdots\circ(s-2|s-1)\circ(s-1|s)\end{aligned}$$

alkeisvaihdosten tulo. Näin ollen σ:lla on esitys

$$\sigma = \tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p, \quad \tau_j\text{:t alkeisvaihdoksia.}$$

Jo todistetun erikoistapauksen ja 5.0.8:n mukaan saadaan

$$\begin{aligned}\sigma D &= (\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p)D = \tau_1(\tau_2\ldots(\tau_p D)\ldots)\\ &= -(\tau_2(\tau_3\ldots(\tau_p D)\ldots)) = (-1)^p D = \epsilon(\sigma)D. \quad \square\end{aligned}$$

Seuraus 5.1.5. *$D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n) = 0$, jos $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_s$ joillakin $r,s\in\{1,2,\ldots,n\}$, $r\neq s$.*

Todistus. Merkitään $\tau = (r|s)$. Olkoon esimerkiksi $r < s$. Silloin

$$\begin{aligned}D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r,\ldots,\mathbf{a}_s,\ldots,\mathbf{a}_n) &\overset{\mathbf{a}_r=\mathbf{a}_s}{=} D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_s,\ldots,\mathbf{a}_r,\ldots,\mathbf{a}_n)\\ = (\tau D)(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r,\ldots,\mathbf{a}_s,\ldots,\mathbf{a}_n) &\overset{5.1.4}{=} -D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r,\ldots,\mathbf{a}_s,\ldots,\mathbf{a}_n).\end{aligned}$$

Siis $D(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n) = 0$. $\square$

Olkoon $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ determinanttifunktio, $A = [\,a_{ij}\,] = [\,\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,]$, $B = [\,b_{ij}\,] = [\,\mathbf{b}_1\ \ldots\ \mathbf{b}_n\,]$ $n\times n$-matriiseja ja $C = BA = [\,c_{ij}\,] = [\,\mathbf{c}_1\ \ldots\ \mathbf{c}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriisien sarakkeet $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ ja $\mathbf{c}_j$). Siis

$$\begin{aligned}c_{kj} &= \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ki}, \quad \text{ts.}\\ \mathbf{c}_j &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{b}_i, \quad j = 1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

Lemma 5.1.6. $D(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_n) = (\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n})D(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n)$.
Erityisesti $D(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}$.

Todistus.

$$\begin{aligned} D(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\dots,\mathbf{c}_n) &= D(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}\mathbf{b}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}\mathbf{b}_{i_2},\dots,\sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}\mathbf{b}_{i_n}) \\ &\overset{5.1.1\,i}{=} \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n} D(\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\dots,\mathbf{b}_{i_n}). \end{aligned}$$

Seurauksen 5.1.5 nojalla voi olla $D(\mathbf{b}_{i_1},\dots,\mathbf{b}_{i_n}) \neq 0$ vain, kun indeksit $i_1,\dots,i_n \in \{1,2,\dots,n\}$ ovat kaikki eri lukuja, ts. $(i_1,\dots,i_n) = \sigma \in S_n$. Siispä

$$D(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2},\dots,a_{\sigma(n)n} D(\mathbf{b}_{\sigma(1)},\mathbf{b}_{\sigma(2)},\dots,\mathbf{b}_{\sigma(n)}),$$

ja lauseen 5.1.4 nojalla $D(\mathbf{b}_{\sigma(1)},\mathbf{b}_{\sigma(2)},\dots,\mathbf{b}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)D(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_n)$.

Viimeinen väite saadaan valitsemalla $B = I_n$ eli $(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n) = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$, $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta, sillä 5.1.1 iii):n mukaan $D(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n) = 1$. $\square$

Lause 5.1.7. *Jokaisella $n \geq 1$ on olemassa täsmälleen yksi determinanttifunkio $D = D_n : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$.*

Todistus. Yksikäsitteisyys nähtiin 5.1.6:ssa.
Olemassaolo todistetaan induktiolla n:n suhteen. Tapaus $n = 1$ (ja myös $n = 2$) on selvä (esimerkki 5.1.3). Olkoon sitten $n \geq 2$ ja $D_{n-1} : (\mathbb{R}^{n-1})^{n-1} \to \mathbb{R}$ avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ determinanttifuktio (induktio-oletus). Määritellään $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ ja $\pi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\pi : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \pi' : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1.$$

Selvästi π ja π' ovat lineaarisia. Kun $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, määritellään

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) &= \pi'(\mathbf{a}_1)D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_2),\dots,\pi(\mathbf{a}_n)\big) \\ &- \pi'(\mathbf{a}_2)D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1),\pi(\mathbf{a}_3),\dots,\pi(\mathbf{a}_n)\big) + \dots \\ &\dots + (-1)^{i+1}\pi'(\mathbf{a}_i)D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1),\dots,\pi(\mathbf{a}_{i-1}),\pi(\mathbf{a}_{i+1}),\dots,\pi(\mathbf{a}_n)\big) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1}\pi'(\mathbf{a}_n)D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1),\dots,\pi(\mathbf{a}_{n-1})\big). \end{aligned}$$

Väite: $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ on determinanttifunktio.

Todistus: i) D on lineaarinen tietyn argumenttinsa suhteen (kun muut argumentit ovat kiinteitä), koska jokainen yhteenlaskettava on tällainen (π ja π' ovat lineaarisia ja D_{n-1} on multilineaarinen).

ii) Olkoon $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i+1}$ eräällä $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Tällöin $\pi(\mathbf{a}_i) = \pi(\mathbf{a}_{i+1})$ ja $\pi'(\mathbf{a}_i) = \pi'(\mathbf{a}_{i+1})$, joten

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = (-1)^{i+1} &\overbrace{\pi'(\mathbf{a}_i)}^{\pi'(\mathbf{a}_{i+1})} D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1), \ldots, \pi(\mathbf{a}_{i-1}), \overbrace{\pi(\mathbf{a}_{i+1})}^{\pi(\mathbf{a}_i)}, \ldots, \pi(\mathbf{a}_n)\big) \\
&+ (-1)^{i+2} \pi'(\mathbf{a}_{i+1}) D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1), \ldots, \pi(\mathbf{a}_i), \pi(\mathbf{a}_{i+2}), \ldots, \pi(\mathbf{a}_n)\big) \\
&(5.1.1 \text{ ii} \implies \text{muut yhteenlaskettavat} = 0) \\
= [(-1)^{i+1} + (-1)^{i+2}] &\pi'(\mathbf{a}_{i+1}) D_{n-1}\big(\pi(\mathbf{a}_1), \ldots, \pi(\mathbf{a}_i), \pi(\mathbf{a}_{i+2}), \ldots, \pi(\mathbf{a}_n)\big) \\
= 0.&
\end{aligned}
$$

iii) Koska $\pi'(\mathbf{e}_1) = 1$, $\pi'(\mathbf{e}_i) = 0$ kaikilla $i \in \{2, \ldots, n\}$ ja $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ kaikilla $i \in \{2, \ldots, n\}$, on

$$
D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1 \cdot D_{n-1}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}) = 1. \quad \square
$$

Määritelmä 5.1.8. Neliömatriisin $A = [\, a_{ij} \,] = [\, \mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \ldots \; \mathbf{a}_n \,] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *determinantti* on

$$
\begin{aligned}
\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} &= D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} &\in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

missä $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}^n$:n determinanttifuktio.

5.2 Determinanttien ominaisuuksia

Lause 5.2.1. *Jokaisella* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *on* $\det(A^T) = \det(A)$.

Todistus. Olkoon $A = [\, a_{ij} \,]$. Tällöin $A^T = [\, b_{ij} \,]$, missä $b_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$, joten

$$
\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.
$$

Kun $\sigma \in S_n$ ja $\sigma(i) = j$, on $\sigma^{-1}(j) = i$ ja $a_{i\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(j)j}$; siis

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

(tulon tekijät ovat vain eri järjestyksessä). Lisäksi $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ (5.0.6). Siispä

$$\begin{aligned}\det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \epsilon(\rho)a_{\rho(1)1}a_{\rho(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\rho(n)n} = \det(A)\end{aligned}$$

(kuvaus $\sigma \mapsto \sigma^{-1} = \rho$ on bijektio $S_n \to S_n$). $\square$

Lause 5.2.2. *Kun* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *on* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Todistus. Lemman 5.1.6 nojalla on $\det(AB) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Varoitus 5.2.3. Yleensä $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Lause 5.2.4. *Neliömatriisi* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on säännöllinen* $\iff$ $\det(A) \neq 0$. *Tällöin* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Oletetaan, että A on säännöllinen. Silloin on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Koska $AA^{-1} = I_n$, on

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) \overset{5.2.2}{=} \det(A)\det(A^{-1}).$$

Tästä seuraa, että $\det(A) \neq 0$ ja $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

" $\Longleftarrow$ ". Olkoot A:n sarakkeet $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Oletetaan, että A ei ole säännöllinen. On osoitettava, että tällöin välttämättä $\det(A) = 0$.

Lauseen 2.7.4 mukaan on $\dim(\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)) = \mathrm{rank}(A) < n$, joten jono $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ on sidottu. Näin ollen on $\mathbf{a}_k \in \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n))$ eräällä $k \in \{1, \ldots, n\}$, joten vektorilla $\mathbf{a}_k$ on esitys

$$\mathbf{a}_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} x_i\mathbf{a}_i \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Määritelmän 5.1.1 kohdista i) ja ii) seuraa nyt, että

$$\begin{aligned}\det(A) = D_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) &= D_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \sum_{i\neq k} x_i\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i\neq k} x_i D_n \underbrace{(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}_{\text{2 samaa}} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Seuraus 5.2.5. *Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ja olkoon B säännöllinen. Silloin*

$$\det(BAB^{-1}) = \det(A).$$

Todistus. 5.2.4:n mukaan on $\det(B) \neq 0$ ja

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(B)^{-1} = \det(A). \quad \square$$

Seuraus 5.2.6. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, $L : V \to V$ lineaarikuvaus, ja S ja T kaksi V:n kantaa. Tällöin*

$$\det M(L; S \leftarrow S) = \det M(L; T \leftarrow T).$$

Todistus. Seurauksen 4.3.11 b) nojalla on $M(L;T \leftarrow T) = Q^{-1}M(L;S \leftarrow S)Q$, missä $Q = M(S \leftarrow T)$. Väite seuraa 5.2.5:stä. $\square$

Määritelmä 5.2.7. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. *Lineaarikuvauksen $L : V \to V$ determinantti* on

$$\det(L) = \det M(L; S \leftarrow S) \in \mathbb{R},$$

missä S on jokin V:n kanta. (Tämä määritelmä on 5.2.6:n nojalla mielekäs.)

5.2.7:n tilanteessa erityisesti L on isomorfismi $\overset{4.3.13}{\iff}$ $M(L; S \leftarrow S)$ on säännöllinen $\overset{5.2.4}{\iff}$ $\det M(L; S \leftarrow S) \neq 0 \iff \det(L) \neq 0$.

5.3 Kehityskaavat ja determinanttien laskeminen

Olkoon $A = [\, a_{ij} \,]$ $n \times n$-matriisi, $n \geq 2$. Kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, olkoon $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ se $(n-1)\times(n-1)$ matriisi, joka saadaan poistamalla A:sta i:s rivi ja j:s sarake.

Lemma 5.3.1. a) $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})$,

b) $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det(A_{1j})$.

Todistus. b) seuraa suoraan 5.1.7:n rekursiivisesta konstruktiosta.
a) Merkitään $B = A^T = [\, b_{ij} \,]$, jolloin $b_{ij} = a_{ji}$. Lauseen 5.2.1 nojalla on

$$\det(A) = \det(B) \overset{\text{b)}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{1i}\underbrace{\det(B_{1i})}_{=\det((A_{i1})^T)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{i1}\det(A_{i1}). \quad \square$$

Lause 5.3.2. a) *Kiinteällä* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *on*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (\textit{kehitetty sarakkeen } j \textit{ mukaan}).$$

b) *Kiinteällä* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *on*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (\textit{kehitetty rivin } i \textit{ mukaan}).$$

Todistus. a) Olkoon $A = [\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,]$ (sarakkeet $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$), ja $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ kiinteä. Merkitään $A' = [\,a'_{ij}\,] = [\,\mathbf{a}_{j_0}\ \mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_{j_0-1}\ \mathbf{a}_{j_0+1}\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,]$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{j_0-1} \det(A') \quad (5.1.4;\ j_0 - 1 \text{ vaihdosta}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j_0-1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det(A'_{i1}) \quad (5.3.1 \text{ a}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{ij_0}).
\end{aligned}$$

b) seuraa vastaavasti 5.3.1 b):stä. $\square$

Esimerkki 5.3.3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Muistisäännöt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$\diagdown \implies +-$ merkki

$\diagup \implies --$ merkki

Varoitus 5.3.4. Vastaavia muistisääntöjä ei ole suuremmille determinanteille.

Determinanttien laskeminen.

Olkoon $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Selitämme, miten $\det(A)$ kannattaa laskea; kaava

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

on työläs eikä sovellu käytännön laskuihin, jos $n > 3$. Menetelmä perustuu ominaisuuksiin 5.1.1 i) ja ii), sekä kehityskaavoihin 5.3.2 (suluissa mainitut versiot perustuvat lisäksi kaavaan $\det(A^T) = \det(A)$.)

Lemma 5.3.5. *Olkoon $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ saatu lisäämällä tiettyyn A:n sarakkeeseen (riviin) jokin toinen sarake (rivi) vakiolla kerrottuna. Tällöin* $\det(B) = \det(A)$

Todistus. Olkoot A:n sarakkeet $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\det(B) = D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&\overset{5.1.1\,\mathrm{i}}{=} D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \underbrace{cD(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}_{=0 \quad (5.1.1\,\mathrm{ii})} \\
&= \det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

Laskumenetelmä 5.3.6. Jos A:n jokin sarake (rivi) $= \mathbf{0}$, niin määritelmän 5.1.1 kohdasta i) seuraa, että $\det(A) = 0$. Vastaavasti, jos A:ssa on kaksi samaa saraketta (riviä), niin seurauksesta 5.1.5 seuraa, että $\det(A) = 0$.

Muussa tapauksessa valitaan jokin sellainen (p, q), että $a_{pq} \neq 0$. Lisätään A:n j:nteen sarakkeeseen $(-a_{pj}/a_{pq})\cdot$(sarake q), $j = 1, \ldots, n$, $j \neq q$ (tai lisätään i:nteen riviin $(-a_{iq}/a_{pq}) \cdot$ (rivi p), $i = 1, \ldots, n$, $i \neq p$). Tällöin saadaan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jonka rivillä p (sarakkeella q) on vain yksi alkio $\neq 0$, nimittäin kohdassa (p, q) oleva a_{pq}, ja

$$\det(A) \overset{5.3.5}{=} \det(B) \overset{5.3.2}{=} (-1)^{p+q} a_{pq} \det(B_{pq}).$$

Näin n-rivisen determinantin $\det(A)$ laskeminen palautuu yhden $(n-1)$-rivisen determinantin $\det(B_{pq})$ laskemiseen. $\square$

Menetelmässä 5.3.6 kannattaa (p, q) yleensä valita niin, että rivillä p (tai sarakkeella q) on valmiiksi mahdollisimman monta nollaa.

Esimerkki 5.3.7. (a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -8 \end{vmatrix} \overset{2}{=} (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = (-2)\big(3\cdot(-8) - 1\cdot(-3)\big) = 42.$$

Selitykset: 1) Sarakkeeseen 3 lisätään $(-2) \times$ sarake 2; 2) kehitetään 1. rivin suhteen.

(b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & -11 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & -11 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ -11 & 0 & 4 & -9 \end{vmatrix} \overset{2}{=} (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -11 & 1 \\ 4 & 0 & 10 \\ -11 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3}{=} - \begin{vmatrix} 6 & -11 & -14 \\ 4 & 0 & 0 \\ -11 & 4 & \frac{37}{2} \end{vmatrix} \overset{4}{=} -(-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -11 & -14 \\ 4 & \frac{37}{2} \end{vmatrix} = -590.$$

Selitykset: 1) Riviin 3 lisätään rivi 1, riviin 4 lisätään $(-3)\times$rivi 1; 2) kehitetään 2. sarakkeen suhteen; 3) sarakkeeseen 3 lisätään $(-\frac{5}{2}) \times$ sarake 1; 4) kehitetään 2. rivin suhteen.

Esimerkki 5.3.8. Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla on

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \qquad \text{säännöllinen ?}$$

Ratkaisu. Kehitetään ensimmäisen sarakkeen suhteen:

$$\det(A) = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(a^2-1) - (a-1) + (1-a) = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2).$$

A on säännöllinen $\overset{5.2.4}{\iff}$ $\det(A) \neq 0 \iff (a-1)^2(a+2) \neq 0 \iff a \neq 1$ ja $a \neq -2$. □

Esimerkki 5.3.9. Jos $A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on ylä- tai alakolmiomatriisi, on $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, lävistäjäalkioiden tulo.

Todistus. Kehitetään toistuvasti ensimmäisen sarakkeen suhteen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Alakolmiomatriisit käsitellään samoin. □

Käänteismatriisin lauseke.

Lause 5.4.1. *Olkoon* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$ *(jolloin* A *on säännöllinen). Silloin* $A^{-1} = [\, c_{ij}\,]$, *missä*

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ji}) \quad \textit{kaikilla } i, j.$$

Todistus. Olkoon $A = [\, a_{ij}\,]$. Määritellään matriisi $B = [\, b_{ij}\,]$ asettamalla $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ kaikilla i, j. Lasketaan tulomatriisi $AB = [\, d_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}\det(A_{jk}) \quad \text{kaikilla } i, j.$$

Kehityskaavan 5.3.2 b) mukaan on $d_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}\det(A_{ik}) = \det(A)\ \forall i$. Kun $i \neq j$, seuraa 5.3.2 b):stä vastaavasti että, $d_{ij} = \det(A')$, missä A':n rivi l = A:n rivi l, kun $l \neq j$, ja A':n rivi j = A:n rivi i; siis A':ssa on kaksi samaa riviä, joten $d_{ij} = \det(A') = 0$ aina, kun $i \neq j$. Kaikkiaan $AB = \det(A)\cdot I_n$, mistä väite seuraa. □

Tapauksessa $n = 2$ saadaan sivulla 104 esiintynyt kaava.

Seuraus 5.4.2. *Jos* $A = [\, a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$ *ja* $A^{-1} = [\, c_{ij}\,]$, *niin* c_{ij}*:t ovat muuttujien* a_{ij} *rationaalilausekkeita.* □

Käytännön laskuissa tulosta 5.4.1 ei kannata käyttää A^{-1}:n määrittämiseen ainakaan, jos $n > 3$.

Yhtälöryhmän ratkaisujen lauseke.

Lause 5.4.3. *(Cramerin sääntö) Olkoon* $A = [\, \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$ *ja* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin yhtälöryhmällä* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *on yksikäsitteinen ratkaisu* $\mathbf{x} = [\, x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\,]^T$, *joka saadaan kaavoista*

$$x_i = \frac{D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Todistus. Lauseiden 5.2.4 ja 1.4.8 nojalla yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x}$ on olemassa. Tällöin $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$. Kun $i \in \{1, \ldots, n\}$, on siis

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) &= D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&\overset{5.1.1.\mathrm{i}}{=} x_i D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \sum_{k\neq i} x_k \underbrace{D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}_{=0 \quad (5.1.5)} \\
&= x_i \cdot \det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.4.4. Tapauksessa $n = 2$ on

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Seuraus 5.4.5. 5.4.3*:ssa* x_i*:t ovat muuttujien* a_{ij} *ja* b_i *rationaalilausekkeita.* □

Käytännössä lineaarinen yhtälöryhmä kannattaa ratkaista Gaussin eliminointimenetelmällä, kuten aiemmin opittiin.

Suunnikkaan pinta-ala.

Tarkastellaan tason $\mathbb{R}^2$ vektoreita $\mathbf{a} = [\,a_1 \quad a_2\,]^T$ ja $\mathbf{b} = [\,b_1 \quad b_2\,]^T$. Voidaan myös tulkita, että $\mathbf{a} = [\,a_1 \quad a_2 \quad 0\,]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{b} = [\,b_1 \quad b_2 \quad 0\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Sovelluksen 3.5.7 mukaan $\mathbf{a}$:n ja $\mathbf{b}$:n virittämän suunnikkaan pinta-ala on

$$= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right\| = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

missä abs tarkoittaa itseisarvoa.

Suuntaissärmiön tilavuus.

Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$:n vektoreita $\mathbf{a} = [\,a_1 \quad a_2 \quad a_3\,]^T$, $\mathbf{b} = [\,b_1 \quad b_2 \quad b_3\,]^T$ ja $\mathbf{c} = [\,c_1 \quad c_2 \quad c_3\,]^T$. Sovelluksen 3.5.9 mukaan $\mathbf{a}$:n, $\mathbf{b}$:n ja $\mathbf{c}$:n virittämän suuntaissärmiön tilavuus on

$$= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \left| a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right| = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Yleisesti voidaan ajatella, että n-rivisen determinantin itseisarvo on n:n $\mathbb{R}^n$:n vektorin virittämän n-ulotteisen suuntaissärmiön tilavuus. Tästä syystä $\mathbb{R}^n$:n determinanttifunktiota kutsutaan myös tilavuusfunktioksi.