Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 9
2.12. 2011

Alla olevissa tehtävissä

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^N |\partial^\alpha f(x)| < \infty, \text{ kaikilla } N \in \mathbb{N}\}.$$

1. Olkoon $f(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Osoita, että $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2. Osoita, että

   a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d), \qquad 1 \le p \le \infty.$

   b) $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, kun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   c) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, kun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3. Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, näytä että $(1+|x|^2)^{-1} f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

4. Jos $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, osoita että differentiaaliyhtälöllä

$$\Delta f - f = h, \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2,$$

on aina ratkaisu $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

[Vihje: Ota yhtälöstä Fourier muunnos, ja hyödynnä edellista tehtävää.]

5. Etsi funktio $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ jolle $|f(x)| \le Ce^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, jollakin vakiolla $C > 0$, mutta $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.