Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 8
25.11. 2011

1. Näytä, että yksikkövälin karakteristinen funktio $f = \chi_{[-1,1]}$ on esimerkki funktiosta $f \in L^1(\mathbb{R})$, jonka Fourier muunnos ei kuulu avaruuteen $L^1(\mathbb{R})$.

[Vihje: Karakteristisen funktion Fourier muunnos laskettu jo aiemmissa harjoituksissa.]

2. Etsi funktio $g \in L^2(\mathbb{R})$, jolle $g \notin L^1(\mathbb{R})$, mutta $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Todista, että radiaalisen funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ Fourier muunnos on radiaalinen. [Funktio $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on radiaalinen, jos se on muotoa $f(x) = g(|x|)$ jollakin funktiolla $g(t), t \geq 0$.]

[Vihje: näytä, että f on radiaalinen jos ja vain jos $f \circ \rho = f$ kaikille kierroille $\rho \in O(d)$, so. lineaarisille $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ joille $\rho(x) \cdot \rho(y) = x \cdot y$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^d$]

4. Todista Teoreema VII.2.12 tapauksessa $f \in L^\infty$: Oletetaan että $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ toteuttaa ehdot

a) $\phi \geq 0$, b) ϕ radiaalinen ja c) ϕ vähenevä, $\phi(x) \leq \phi(y)$ kun $|x| > |y|$.

Jos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, tällöin pätee $(\phi_\varepsilon * f)(x) \to c_\phi\, f(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$. Tässä $c_\phi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)dy$.

[Vihje: Jos $|x| < r$, kirjoita f muodossa $f = f_1 + f_2$, missä $f_1(y) = f(y)$ kun $|y| \leq 1 + r$ ja $f_1(y) = 0$ kun $|y| > 1 + r$; ja sovella Teoreemaa VII.2.12. funktioon f_1.]

5. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ jatkuva funktio. Osoita, että jos Fourier muunnos $\widehat{f}(\xi) \geq 0$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^d$, silloin $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

[Vihje: Sovella Lausetta VII.2.1 funktioihin $f(x)$ ja $g(x) = e^{-\delta|x|^2}$, sekä tarkastele raja-arvoa $\delta \to 0$; hyödynnä luentojen tuloksia.]