Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 7
18.11. 2011

1. Määrää funktion

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

Fourier muunnos.

[Vihje: Hyödynnä Harjoitus 6:n tehtäviä, ja tietoa että käänteinen Fourier muunnos saadaan kaavasta $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-d}(\mathcal{F}\widehat{f}\,)(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d$, kun $f,\ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.]

2. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja A kääntyvä $d \times d$ matriisi. Osoita, että

$$(f \circ A)\widehat{\ }(\xi) = |\det A^{-1}|\widehat{f}\,(A^{-t}\xi)$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^d$. Tässä $A^{-t} = [A^{-1}]^t = [A^t]^{-1}$.

3. Olkoon A positiividefiniitti symmetrinen $d \times d$ matriisi, jonka kertoimet reaalisia. Määrää Fourier muunnos funktiolle $f(x) = e^{-x \cdot Ax}, \quad x \in \mathbb{R}^d$.

[Vihje: Valitse $\mathbb{R}^d$:n koordinaateiksi A:n ominaiskanta; oletusten nojalla tämä voidaan valita ortonormaaliksi.]

4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sellainen funktio, että $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on kompaktikantajainen (so. $\widehat{f}(\xi) = 0$ kun $|\xi| > M$, jollakin vakiolla $M > 0$).
Osoita, että $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

[Vihje: Hyödynnä käänteistä Fourierin muunnosta sekä luennolla esitettyjä derivaattojen ja Fourier-muunnoksen yhteyksiä.]

5. Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$, osoita että

$$f(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

missä konvergenssi tapahtuu L^1-normin mielessä.

[Vihje: Jos $k(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$, sovella luentomuistiinpanojen s. 94 kaavan (2.6) päättelyä funktioon f ja funktioon $k(x/\lambda)$.]