Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 6
11.11. 2011

1. Määrää Fourier muunnos välin $[-a, a]$ karakteristiselle funktiolle $\chi_{[-a,a]}$, kun $a > 0$. (So. $\chi_{[-a,a]}(x) = 1$, jos $|x| \leq a$ ja $\chi_{[-a,a]}(x) = 0$ jos $|x| > a$.)

2. Laske Fourier muunnos $\widehat{f}(\xi)$ funktiolle $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Funktiosta $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tiedetään, että Fourier muunnos $\widehat{h}(\xi) = e^{-s|\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Määrää silloin $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

4. Kun $0 < r < \infty$, asetetaan

$$g_r(x) = e^{-r|x|^2}, \qquad x \in R^d.$$

Määrää konvoluutio $g_{r_1} * g_{r_2}$.
[Vihje: Laskut helpottuvat, jos teet ne Fourier puolella.]

5. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$ funktio, jonka Fourier muunnos toteuttaa ehdon

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^{1+a}}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

joillakin vakioilla $0 < a < 1$ ja $C < \infty$. Osoita että silloin $f \in Lip_a(\mathbb{R})$, so.

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M\,|h|^a, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

[Vihje: Voit olettaa tunnetuksi, että käänteinen Fourier muunnos kaava pätee pisteittäin, kun sekä f että $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.]