

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Fourier analyysi

Harjoitus 5

14.10.2011

1. Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π -periodinen funktio. Osoita, että f :n Fourier sarja suppenee itseisesti.

[Vihje: Käytä yhtälöä $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$, ja arvioi sarjaa $\sum |\widehat{f}(n)|$ Cauchy-Schwarzin avulla]

2. Olkoot $\{F_N\}$ Fejerin ytimet, $N \in \mathbb{N}$. Todista Plancherelin kaavan avulla, että

$$\|F_N * f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}, \quad \text{kaikilla } f \in L^2[-\pi, \pi].$$

[Vihje: Muista konvoluution ja Fourier kertoimien välinen yhteys]

3. Olkoon $R_\gamma : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ lukuun $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liittyvä ”rotaatio”, $R_\gamma(x) = \langle x + \gamma \rangle$, so. luvun $x + \gamma$ murto-osa. Näytä jokaiselle $f \in L^1[0, 1]$, että

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f \circ R_\gamma^n - \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^1[0,1]} \rightarrow 0, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty.$$

[Vihje: kts. luennot.]

4. Näytä että Harjoitusten 4 tehtävän 2 arviota ei voi parantaa: Osoita, että

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (0 < \alpha < 1)$$

on α -Hölder jatkuva, ja $\widehat{f}(n) = 1/n^\alpha$, kun $n = 2^k$.

[Vihje: Hölder jatkuvuuden osoittamiseksi jaa Fourier-sarja $f(x+h) - f(x) = \sum_{2^k \leq 1/|h|} + \sum_{2^k \geq 1/|h|}$ kahteen osaan; ensimmäisessä hyödynnä arviota $|1 - e^{ix}| \leq |x|$ ja toisessa $|e^{ix} - e^{iy}| \leq 2$.]

5. Olkoon $f \in C^1[0, \pi]$ funktio, jolle $f(0) = 0 = f(\pi)$. Todista Wirtingerin epäyhtälö,

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx \leq \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx.$$

Osoita myös, että arviossa pätee yhtäsuuruus joillakin (millä?) fkt:illa $f \neq 0$.

[Vihje: Laajenna f parittomaksi fkt:ksi välille $[-\pi, \pi]$ ja esitä yo. epäyhtälön kumpikin puoli Fourier sarjan avulla]