Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 4
7.10.2011

1. Olkoon $f(x)$ 2π-periodinen funktio, jolle $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - f(x + \pi/n)\big) e^{-inx} dx$$

2. Jos edellisen tehtävän funktio on α-Hölder jatkuva, $|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha$ kun $|h| \leq \pi$, silloin

$$|\widehat{f}\,(n)| \leq C|n|^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Osoita Weylin kriteerin käänteinen suunta: Jos lukujono $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..)$ on tasan jakautunut välille $[0, 1)$, silloin jokaisella indeksillä $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\, k\, \eta_n} \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty.$$

[Vihje: Osoita että tasan jakautuneelle jonolle $N^{-1} \sum_1^N f(\eta_n) \to \int_0^1 f(x)dx$; kun f on välin karakteristinen funktio, lineaarinen kombinaatio tällaisista, tai kun f on jatkuva]

4. (Käänteinen edellisen HT:n tehtävälle 2) Oletamme, että $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Jos kaikilla $k \in \mathbb{N}$ löytyy vakio $C = C_k$ jolle

$$|\widehat{f}\,(n)| \leq C_k |n|^{-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

silloin on olemassa funktio $g \in C^\infty[-\pi, \pi]$, jolle $f(x) = g(x)$ melkein kaikkialla.

[Vihje: Osoita että f:n Fourier sarjaa voi derivoida]

5. Osoita, että jono $(\, \langle a \log n \rangle\,)_{n=1}^\infty$ *ei* ole tasan jakautunut välille $[0, 1)$ kun $a \in \mathbb{R}$.

[Vihje: Sovella Weylin kriteeriä ja vertaa summan $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \log n}$ suuruutta vastaavaan integraaliin]