Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 3
30.9.2011

1. Tarkastellaan 2π-periodista "sahalaita"-funktiota, $f(x) = (\pi - x)/2$, kun $0 < x < \pi$ ja $f(x) = (-\pi - x)/2$, kun $-\pi < x < 0$. Osoita, että

$$S_N f(x) = \frac{1}{2i} \sum_{0<|n|\leq N} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1)\, dt$$

2. Olkoon $f \in C^\infty[-\pi, \pi]$; oletamme että f ja kaikki sen derivaatat $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, ovat $2\pi-$periodisia.

Osoita, että silloin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ löytyy vakio $C = C_k < \infty$, jolle

$$|\widehat{f}(n)| \;\leq\; C|n|^{-k}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. Osoita Dirichlet ytimen $D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})\,x]}{\sin\frac{x}{2}}$ ja integraalin $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$ avulla, että

$$\int_0^\infty \frac{\sin\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

[Vihje: Osoita, että funktio $g(x) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$ on jatkuva välillä $[-\pi, \pi]$, ja käytä Riemann-Lebesguen lemmaa.]

4. Olkoon $(f_n)_{n=1}^\infty$ jono avaruudessa $L^1[-\pi, \pi]$. Sanomme, että jono (f_n) suppenee heikosti kohti funktiota $f \in L^1[-\pi, \pi]$, jos kaikilla $g \in L^\infty[-\pi, \pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Osoita Riemann–Lebesguen Lemman avulla, että ei ole olemassa funktiota $F \in L^1[-\pi, \pi]$ jota kohti Fejérin ytimien muodostama jono $(F_N)_{N=1}^\infty$ suppenisi heikosti.

5. Luennoilta tiedämme, että tehtävän 1 funktion $f(x)$ Fourier osasummat suppenevat joka pisteessä. Osoita nk. *Gibbsin ilmiö*, että suppeneminen ei ole tasaista f:n hyppypisteessä $x = 0$:

$$S_N f\,(\pi/N) \to \int_0^\pi \frac{\sin\, x}{x}\, dx \;>\; f(0+) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

[Vihje: Hyödynnä tehtävää 1 ja tehtävän 3 vihjeen funktiota $g(x)$]