Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 2
23.9.2011

1. Osoita Dirichlet ytimille identiteetti $\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$.

2. Olkoot F_N, $N \in \mathbb{N}$, Fejérin ytimet ja $\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$. Osoita, että

$$\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

3. Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ 2π-periodisia funktioita joille pätee $f,\ g \in L^1[-\pi, \pi]$. Näytä, että

a) Jos f tai g on jatkuva, silloin konvoluutio $f * g$ on jatkuva.

b) Konvoluution Fourier kertoimet $(\widehat{f * g})(n) = \widehat{f}(n)\,\widehat{g}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

[b)-kohdassa voit käyttää Fubinin lausetta tai palauttaa tämän trigonometrisiin polynomeihin.]

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja 2π-periodinen. Jos f:n Fourier sarja suppenee pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, eli raja-arvo

$$a = \lim_{N \to \infty} S_N f(x_0)$$

on olemassa, näytä että silloin välttämättä $a = f(x_0)$.
[Vihje: Muista $\sigma_N f(x_0)$:n ominaisuudet.]

5. Asetetaan $f(x) = |x|$, kun $-\pi \le x \le \pi$. Määrää Fourier kertoimet $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ja osoita f:n Fourier sarjan avulla, että

$$\sum_{\substack{n \ge 1, \\ n \text{ pariton}}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$