Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 10
9.12. 2011

1. Tiedämme distribuutiosta $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ että $\widehat{T} = T_g$, missä $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että $T = T_f$, missä f on kaavan

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

määräämä jatkuva funktio.

2. Olkoon

$$T(g) = \int_{-1}^{1} g(x,x)dx, \qquad \text{kun } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Osoita, että $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ ja määrää $(\partial_1 + \partial_2)T$.

3. Osoita Poissonin summauskaavan avulla, että

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} \qquad \text{kaikilla } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

4. Jos $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, määritellään $\check{g}(x) = g(-x)$ ja $\tau_y g(x) = g(x-y)$. Näytä, että jokaisella $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on $(f * g)(y) = T_f(\tau_y \check{g})$.

Jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, asetetaan analogisesti $(T * g)(y) = T(\tau_y \check{g})$. Osoita, että kaikilla $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$T * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{ja} \quad \partial^\alpha (T * g) = (\partial^\alpha T) * g = T * (\partial^\alpha g)$$

[Vihje: Osoita, että $\varepsilon^{-1}(\tau_{-\varepsilon e_j} g - g) \to \partial_j g$ (suppeneminen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:ssä)]

5. Osoita, että $\log|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja että distribuutioderivaatta

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \mathbf{p.v.}\frac{1}{x}$$