

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Harjoitus 1
16.9.2011

1. Olkoon $P(x)$ (2π -periodinen) trigonometrinen polynomi,

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}.$$

Osoita, että P :n potenssit $P(x)^k$, $k \in \mathbb{N}$, ja translaatiot $Q(x) := P(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$, ovat trigonometrisia polynomeja.

2. Osoita Eulerin kaavan avulla että

$$\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{k,n} \quad (n, k \geq 1)$$

3. a) Olkoon $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integroitava funktio, jolle $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$. Osoita, että

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

sopivilla kertoimilla a_n, b_n . Määrää nämä.

b) Olkoon f kuten yllä. Jos f on parillinen, so. $f(x) = f(-x)$, näytä, että $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ ja että f :n Fourier sarja on cosini-sarja.

c) Jos f on pariton, so. $f(x) = -f(-x)$, näytä, että $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$ ja että f :n Fourier sarja on sini-sarja.

4. Tarkastellaan funktiota $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \cos(x/2)$. Määrää Fourier kertoimet $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Asetetaan $f(x) = x(\pi - x)$, kun $0 \leq x \leq \pi$. Jatka $f(x)$ parittomaksi 2π -periodiseksi funktioksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ja osoita, että silloin

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \text{ pariton}}} \frac{\sin(kx)}{k^3}$$