

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Esitä 1.kl. differentiaaliyhtälösysteminä seuraava 3.kl. differentiaaliyhtälö:

$$y^{(3)}(x) - 3x^2 \sin x y''(x) + \frac{e^x}{1+x^2} y(x) = 2 \cos x.$$

Onko saatu systeemi lineaarinen? Jos on, niin esitä se vielä matriisimerkinnöin.

2. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

3. Määrää seuraavan autonomisen parin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili), ja anna myös sen yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x + y - 2 \\ \dot{y}(t) &= -5x - 2y + 1. \end{aligned}$$

4. Tarkastellaan 1.kl. autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x - 2y \\ \dot{y}(t) &= x^2 - \frac{3}{2}xy - 1. \end{aligned}$$

(a) Määrää parin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili).

(b) Olkoon $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ piste, joka ei ole parin kriittinen piste, ja olkoon funktio $\mathbf{z} = (x, y) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ parin ratkaisu, jolla $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ (luonnollisesti $0 \in I$). Osoita että ratkaisufunktion arvo $\mathbf{z}(t)$ ei ole parin kriittinen piste millään $t \in I$.