Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 2, syksy 2011

1. Laske kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota alkuarvotehtävälle

$$y' = \cos x, \quad y(\pi) = 0.$$

Huomaatko jotain erikoista, ja kuinka selität sen?

2. Kahden kappaleen ongelman yhteydessä (planeetan kierto auringon ympäri) saatiin kiertolaisen vaihekulmafunktiolle $\theta = \theta(t)$ 1.kl. separoituva DY

$$\dot{\theta}(t) = c_1\Big(Kc_1^{-2} + c\cos\big(\theta(t) - \delta\big)\Big)^2,$$

jossa t on aikamuuttuja, ja δ, c, c_1 sekä K ovat vakioita. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla että DY:n (maksimaali)ratkaisu θ on määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä. Kiertomalli antaa siis globaalin ratkaisun planeetan liikkeelle.

Ohje. Kaikki tapahtuu (t, θ)-tasossa. Alkuehdoksi voit olettaa $\theta(0) = 0$ (voisi olla mikä hyvänsä). Väliarvolause.

3. Sama tehtävä kuin 2, mutta käytä nyt Poistumislausetta 4.7.

Ohje. Alkuehdoksi voit olettaa $\theta(0) = 0$. Yhtälöstä $\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \dot{\theta}(\tau)\, d\tau$ saadaan haarukka ratkaisulle. Kompakteiksi joukoiksi kasvava jono origo-keskisiä neliöitä.

4. Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen 1.kl. homogeenisysteemi

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

5. Palauta seuraavat skalaariyhtälöt 1. kl. systeemeiksi

(a) $y^{(3)} + \sin x\, y' + y = \cos x\,,$

(b) $y^{(4)} + x^2 y'' + x^4 y = \sin x\,.$

6. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1. kl. systeemiksi

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(t, x, y, \dot{y}) \\ \dot{x} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

(b) Entä, jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin

$$\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$