DY I-II, luentomoniste 2011

Mats Gyllenberg Lasse Lamberg Petri Ola
Petteri Piiroinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

December 7, 2011

1 Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt

1.1 Johdanto

Esimerkki 1.1 (Radioaktiivinen hajoaminen). Olkoon $A(t)$ tarkasteltavan aineen radioaktiivisuuden säteilyintensiteetti hetkellä t. Funktion A aikakehitystä kuvaa yhtälö

$$A'(t) = -kA(t). \tag{1.1}$$

Oletetaan että $A(t) > 0$ joka ajanhetkellä t, ja edelleen että $k > 0$, ts. että A on ajan suhteen vähenevä funktio eli $A'(t) < 0$. Koska lisäksi tunnetusti pätee derivoimissääntö

$$\frac{d(\ln f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

voimme ratkaista *differentiaaliyhtälön* (DY) (1.1) seuraavasti (huomaa integraalilaskennan peruslause):

$$\begin{aligned}
A'(t) = -kA(t) \Leftrightarrow \frac{A'(t)}{A(t)} = -k \Leftrightarrow \\
\frac{d(\ln A(t))}{dt} = -k \Leftrightarrow \int \frac{d(\ln A(t))}{dt}\, dt = -\int k\, dt \Leftrightarrow \\
\ln A(t) = -kt + C_1 \Leftrightarrow A(t) = e^{C_1} e^{-kt} = C_2 e^{-kt}.
\end{aligned}$$

DY:n (1.1) ratkaisu $A(t)$ ei siis ole yksikäsitteisesti määrätty, vaan riippuu parametrista C_2, joka voi saada mielivaltaisia positiivisia arvoja. Seikka on differentiaaliyhtälöille luonteenomainen. Jos kuitenkin annetaan *alkuehto*, intensiteetti $A(t)$ tunnetaan vaikka hetkellä $t = 0$,

$$A(0) = A_0, \tag{1.2}$$

niin integroimisvakio C_2 tulee määrätyksi:

$$A_0 = A(0) = C_2 e^0 = C_2.$$

Tehtävää (1.1) ja (1.2) kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT), ja sen ratkaisu on siis

$$A(t) = A_0 e^{-kt}.$$

Siis jos $A_0 > 0$, niin oletuksemme $A(t) > 0$ kaikilla t toteutuu, ja intensiteetin vaimeneminen on eksponentiaalista.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan kappaletta, jonka massa on m ja joka liikkuu pitkin pystysuoraa x-akselia, jossa painovoima vaikutta suoraan alaspäin (= x-akselin positiivinen suunta!). Oletetaan lisäksi että kappaleeseen vaikuttaa liikettä vastustava, nopeuteen suoraan verrannollinen voima (vaikka ilmanvastus) verrannollisuuskertoimenaan $k > 0$. Newtonin liikeyhtälö saa tällöin muodon

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}. \tag{1.3}$$

Siis $x(t)$ on paikka ajanhetkellä t (x paikkafunktio), ja sen derivaatat on merkitty päällipisteillä; $\dot{x}$ on kappaleen nopeus ja $\ddot{x}$ on sen kiihtyvyys; g on kiihtyvyysvakio.

Kun merkitään $v = \dot{x}$ ja $a = k/m$ $(a > 0)$, niin liikeyhtälö (1.3) saa muodon

$$\dot{v} = g - av.$$

Tehdään seuraava derivoimista koskeva huomio (muista tulosääntö):

$$\frac{d(e^{at}v(t))}{dt} = ae^{at}v(t) + e^{at}\dot{v}(t) = e^{at}(\dot{v}(t) + av(t)).$$

Sitä käyttäen saadaan

$$\begin{gathered}\dot{v} = g - av \Leftrightarrow e^{at}(\dot{v} + av) = ge^{at} \Leftrightarrow \\ \int e^{at}(\dot{v} + av)\,dt = g\int e^{at}\,dt \Leftrightarrow \int \frac{d(e^{at}v)}{dt}\,dt = g\int e^{at}\,dt \Leftrightarrow \\ e^{at}v = (g/a)e^{at} + C_1 \Leftrightarrow v = g/a + C_1e^{-at},\end{gathered}$$

josta integroimalla saadaan

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int \Big(g/a + C_1e^{-at}\Big)\,dt = (g/a)t - (C_1/a)e^{-at} + C_2. \tag{1.4}$$

(Yleinen) ratkaisu sisältää nyt siis kaksi parametria, C_1:n ja C_2:n. Tämä johtuu yhtälön (1.3) *kertaluvusta* joka on 2 (toinen derivaatta $\ddot{x}$). Tarvitaan kaksi alkuehtoa, vaikka arvot $x(0)$ ja $v(0) = \dot{x}(0)$, paikka ja nopeus alkuhetkellä. Jos esimerkiksi $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, niin *yleinen ratkaisu* (1.4) antaa tavallisen lineaarisen yhtälöparin $-C_1/a + C_2 = x(0) = 0$ ja $g/a + C_1 = \dot{x}(0) = 0$, josta saadaan $C_1 = -g/a$ ja $C_2 = -g/a^2$. Siten kyseisen AAT:n ratkaisu on

$$x(t) = (g/a)t - (g/a^2)\big(1 - e^{-at}\big).$$

Seuraavaksi määrittelemme joitakin käsitteitä ja annamme todistuksetta erään teoreettisen perustuloksen, jota alamme heti käyttää hyväksemme. Todistus seuraa vasta myöhemmin. Seuraavasssa (ja jatkossa) reaalilukuväli $I \subset \mathbb{R}$ on yhtenäinen, mutta se voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu.

Definition 1.1. (a) Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^{n+2}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Yhtälöä

$$F\big(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \tag{1.5}$$

kutsutaan *(tavalliseksi) differentiaaliyhtälöksi* (DY). Se koskee *yhden muuttujan funktiota* $y = y(x)$, josta esiintyy eri kertaluvun derivaattoja, ja niistä korkeimman mukaisesti DY:n (1.5) *kertaluku* (kl.) on n.

(b) Olkoon f avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Yhtälö

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)\big) \tag{1.6}$$

on *normaalimuotoinen* DY. Siinä siis korkein esiintyvä y:n derivaatta on ratkaistu kaiken muun lausekkeena.

(c) Vähintään kertalukuun n asti derivoituva yhden reaalimuuttujan funktio $y = y(x) : I \to \mathbb{R}$ on DY:n (1.5-6) *ratkaisu* välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos (1.5-6) toteutuu kaikissa pisteissä $x \in I$.

(d) Jollain reaalivälillä I määriteltyjen DY:n (1.5-6) ratkaisujen joukkoa, joka riippuu kertaluvun mukaisesti n:stä vapaasti valittavasta oleellisesta parametrista, kutsutaan kyseisen yhtälön *yleiseksi ratkaisuksi* välillä I.

Huom. Määritelmän 1.1 kohdassa d sana oleellinen tarkoittaa ettei parametrien määrää voi vähentää esimerkiksi uusin merkinnöin. Lausekkeessa $y(x) = C_1 C_2 e^x$ on vain yksi oleellinen parametri, nimittäin $C = C_1 C_2$. On myös mahdollista, että DY:llä on ratkaisuja, jotka eivät sisälly yleiseen ratkaisuun.

Seuraava keskeinen lause takaa 1. kl. normaalimuotoista yhtälöä koskevalle *alkuarvotehtävälle* (AAT) ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden ainakin paikallisesti. Alue on avoin ja yhtenäinen osajoukko.

Theorem 1.2 (Lokaali OY-lause)**.** *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\partial f / \partial y$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin AAT:llä

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.7}$$

on jollakin avoimella välillä I määritelty ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Erityisesti $x_0 \in I$.

(b) Olkoon $x_0 \in I_1 \cap I_2$, ja olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi kyseisen AAT:n ratkaisua, jotka kulkevat D:ssä, ts. $(x, y_k(x)) \in D$ kaikilla $x \in I_k$, $k = 1, 2$. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1 \cap I_2. \tag{1.8}$$

Proof. Esitetään kurssissa Differentiaaliyhtälöt II. □

Vielä toinen, varsin hyödyllinen teoreettinen tulos.

Theorem 1.3 (Poistumislause)**.** *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio f sekä sen osittaisderivaatta $\partial f / \partial y$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin AAT:llä

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on (maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, jossa ratkaisukäyrä $\{(x, y(x)) \mid x \in I\}$ kulkee alueessa D, ja sen hännät poistuvat kyseisen alueen reunalle.

(b) (Maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on yksikäsitteisesti määrätty, ja kaikki muut AAT:n ratkaisut D:ssä ovat sen rajoittumia.

Ilmaisu ”poistua alueen reunalle” kuvaa maksimaaliratkaisun tilannetta hyvin, mutta sen sisältö määritellään tarkemmin kurssissa Differentiaaliyhtälöt II. Siinä esitetään mahdollisesti myös todistus.

1.2 Separoituvat yhtälöt

Definition 1.4. Ensimmäisen kertaluvun DY on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = p(x)q(y), \tag{1.9}$$

jossa $y = y(x)$ on DY:n tuntematon funktio ja p sekä q ovat tunnettuja yhden muuttujan funktioita.

Selvennetään käsitettä muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 1.3. (a) Esimerkin 1.1 yhtälö on separoituva:

$$A'(t) = -kA(t) = p(t)q(A(t)),$$

jossa $p(t) \equiv -k$ ja $q(A) = A$.

(b) Myös yhtälö

$$y' = \frac{2x + xy}{y^3 + 1}$$

on separoituva, sillä

$$\frac{2x + xy}{y^3 + 1} = x\frac{2 + y}{y^3 + 1} = p(x)q(y),$$

jossa

$$p(x) = x \quad \text{ja} \quad q(y) = \frac{2 + y}{y^3 + 1}.$$

(c) Yhtälö $y' = 1 + xy$ puolestaan ei ole separoituva. Jos asian haluaisi todistaa, se hoituisi helpoiten epäsuorasti (hahmottele todistus).

Separoituvan yhtälön standardi ratkaisumenetelmä

Etsitään yhtälön (1.9) ratkaisua jossain (x, y)-tason $\mathbb{R}^2$ alueessa D (luontevasti suorakaide), ja oletetaan että p on jatkuva ja q on jatkuvasti derivoituva siinä. Tällöin OY-lauseen 1.2 oletukset ovat voimassa,. Erityisesti aidosti eri ratkaisut (ratkaisukäyrät) eivät voi leikata toisiaan D:ssä, sillä leikkauspiste voidaan valita alkuehdoksi, jonka kautta siis lauseen 1.2 mukaan kulkee vain yksi ratkaisu.

Olkoon $y = y(x)$ yhtälön (1.9) ratkaisu, jossa jollakin x_0 pätee $(x_0, y(x_0)) \in D$ ja $q(y(x_0)) = 0$. Huomataan että myös vakiofunktio y_0, jossa $y_0 = y(x_0)$, on yhtälön (1.9) ratkaisu (miksi?). OY-lauseen 1.2 nojalla $y(x) \equiv y_0$, mikä seuraa kun alkuehdoksi valitaan $y(x_0) = y_0$. Siten on tultu johtopäätökseen, että

(1) yhtälön $q(y) = 0$ jokainen juuri y_0 antaa DY:n (1.9) vakioratkaisun $y(x) \equiv y_0$, nk. *triviaaliratkaisun*,

(2) muilla D:ssä kulkevilla ratkaisuilla pätee $q(y(x)) \neq 0$ kaikilla x, ja nämä saadaan seuraavasti:

Merkitään $h(y) = 1/q(y)$, ja olkoot $H(y) = \int h(y)\,dy$ ja $P(x) = \int p(x)\,dx$ jotkin funktioiden h ja p integraalifunktiot. Derivoituvalle funktiolle $y = y(x)$ pätee yhdistetyn funktion derivoimis-integroimissäännön nojalla

$$\frac{dH(y(x))}{dx} = H'(y(x))y'(x) = h(y(x))y'(x),$$

joten jos $q(y(x)) \neq 0$ kaikilla x, niin

$$
\begin{aligned}
y'(x) = p(x)q(y) \Leftrightarrow h(y(x))y'(x) = p(x) \Leftrightarrow & \int h(y(x))y'(x)\,dx = \int p(x)\,dx \\
\Leftrightarrow H(y(x)) = P(x) + C.&
\end{aligned}
$$

Saatua tavallista yhtälöä

$$H(y) = P(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

kutsutaan DY:n (1.9) *implisiittiratkaisuksi*. Se siis määrää (1.9):n ratkaisut $y = y(x)$ implisiittisesti mahdollisesti lukuun ottamatta triviaaliratkaisuja.

Esimerkki 1.4. Ratkaistaan separoituva yhtälö

$$y' = \frac{x-5}{y^2},$$

jossa siis $p(x) = x - 5$ ja $q(y) = y^{-2}$. Koska q:lla ei ole nollakohtia, DY:llä ei ole triviaaliratkaisuja. Voimme edetä suoraan ratkaisumenetelmän kohtaan (2). Saadaan (huomaa kätevä merkintätyyli, muuttujien *separointi*, se on aivan kohdan (2) päättelyä noudattava)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2} &\Leftrightarrow y^2\,dy = (x-5)\,dx \Leftrightarrow \int y^2\,dy = \int (x-5)\,dx \\
&\Leftrightarrow (1/3)y^3 = (1/2)x^2 - 5x + C_1.
\end{aligned}
$$

On saatu implisiittiratkaisu, mikä yleensä on riittävää, mutta tällä kertaa voimme ratkaista funktion y helposti myös eksplisiittisesti. Saadaan

$$y(x) = \Big((3/2)x^2 - 15x + C\Big)^{1/3},$$

jossa $C = 3C_1 \in \mathbb{R}$. Tämä ratkaisu on voimassa pisteissä $(3/2)x^2 - 15x + C \neq 0$ (miksi?).

Esimerkki 1.5. Ratkaistaan separoituva yhtälö

$$y' = \frac{y-1}{x+3} = \frac{1}{x+3}(y-1)$$

ja haetaan ne ratkaisut y, joilla $y(1) = 0$, siis ratkaistaan vastaava AAT.

Ensin triviaaliratkaisut:

$$q(y) = y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Siten yhtälöllä on yksi triviaaliratkaisu $y \equiv 1$.

Muut ratkaisut (tarkalleen ottaen $\mathbb{R}^2$:n alueissa, joissa $x > -3$ tai $x < -3$) saadaan separoimalla:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x+3}\,dx \Leftrightarrow \\
&\ln|y-1| = \ln|x+3| + C_1 \Leftrightarrow |y-1| = C_2|x+3| \Leftrightarrow y - 1 = C(x+3),
\end{aligned}
$$

yleinen ratkaisu, jossa $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 = e_1^C > 0$ ja $C = \pm C_2 \neq 0$. Kun vielä otetaan huomioon triviaaliratkaisu $y \equiv 1$, niin C voi saada mitä arvoja tahansa, siis $C \in \mathbb{R}$. Ratkaisut ovat pisteen $(-3, 1)$ kautta kulkevia suoria, mikä ei ole ristiriidassa OY-lauseen kanssa, sillä normaalimuoto ei ole edes määritelty niiden leikkauspisteessä $(-3, 1)$.

Alkuehto $y(-1) = 0$ antaa $-1 = C(-1 + 3) \Leftrightarrow C = -1/2$. Siten AAT:n ratkaisu on

$$y = 1 - (1/2)(x + 3).$$

Edellisessä esimerkissä alkuehtona ei voisi olla $y(-3) = y_0$, sillä yhtälö ei ole edes määritelty tällaisessa pisteessä. Seuraavan esimerkin tarkoitus on osoittaa, että vaikka alkuehto olisikin mielekäs, AAT:n ratkaisun ei tarvitse olla yksikäsitteisesti määrätty. Oleellista on että normaalimuodon antava $f(x, y)$ on tarpeeksi säännöllinen alkuehtopisteen ympäristössä (OY-lauseen Theorem 1.2 oletukset).

Esimerkki 1.6. Ratkaistaan separoituva yhtälö

$$y' = \sqrt{y}$$

puolitasossa $\{(x, y) \,|\, y \geq 0\}$ (jossa DY on määritelty). Koska $q(y) = \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0$, yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$. OY-lauseen oletukset toteutuvat alueessa $\{(x, y) \,|\, y > 0\}$. Kaikki *siinä* kulkevat ratkaisut saadaan separoimalla:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \Leftrightarrow \int (1/2) y^{-1/2}\, dy = (1/2) \int dx \Leftrightarrow y^{1/2} = (1/2)(x + C) \Leftrightarrow y = (1/4)(x + C)^2,$$

jossa $x > -C$ (miksi?). Yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = (1/4)(x + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (x \geq -C), \tag{1.11}$$

ja koska y voi saada myös arvon nolla, *jatkuvuusargumentin* nojalla ratkaisu koskee myös pistettä $x = -3$, ts. kullakin C *maksimaalinen ratkaisuväli* on $x \geq -C$.

Yleinen ratkaisu ei anna triviaaliratkaisua. Enemmänkin, suora lasku osoittaa että kaikilla $a \in \mathbb{R}$ funktio

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ (1/4)(x - a)^2, & x > a, \end{cases} \tag{1.12}$$

on derivoituva ja toteuttaa DY:n kaikilla $x \in \mathbb{R}$. On löydetty äärettömän monta ratkaisua, jotka eivät sisälly yleiseen ratkaisuun (1.11). Itse asiassa, kun $a \geq 0$, ratkaisut (1.12) toteuttavat kaikki alkuehdon $y(0) = 0$. Myös AAT:llä on äärettömän monta ratkaisua. Tämä ”patologisuus” johtuu siitä että $q(y) = \sqrt{y}$ ”käyttäytyy huonosti” pisteessä $y = 0$ (ei ole derivoituva). Tason pisteet $(x, 0)$ eivät kuulu alueeseen, jossa OY-lauseen oletukset toteutuvat; ratkaisukäyrä voi haaroittua tällaisessa pisteessä (tai sellaisen kautta ei tarvitse kulkea yhtään ratkaisua).

1.3 Eksaktit yhtälöt

Tarkastellaan muotoa

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{1.13}$$

olevaa 1. kl. differentiaaliyhtälöä jossain tason $\mathbb{R}^2$ alueessa D. Käytännössä funktiot $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ oletetaan jatkuvasti derivoituviksi siinä (jatkuvat osittaisderivaatat).

Definition 1.5. Yhtälö (1.13) on *eksakti* alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$, jos on olemassa kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio $F : D \to \mathbb{R}$, nk. *integraalifunktio (potentiaali)*, jolle pätee

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in D. \tag{1.14}$$

Huom. Määritelmän vaatimus "kahdesti jatkuvasti derivoituva" voidaan korvata hieman lievemmällä vaatimuksella "kahdesti differentioituva", kts. analyysin kurssit.

Eksaktisuuden hyöty piilee derivoinnin ketjusäännössä. Olkoon $y = y(x)$ derivoituva funktio, joka toteuttaa (tavallisen) yhtälön $F(x, y(x)) \equiv C$ jollakin vakiolla C. Tällöin kyseisen säännön nojalla

$$0 = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) * 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))y'(x) = M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x).$$

Kääntäen, jos $y = y(x)$ on DY:n (1.13) ratkaisu, niin edellä esitetty päättely osoittaa että $(d/dx)F(x,y(x)) = 0$. Siten yhtälö $F(x,y(x)) \equiv C$ toteutuu jollakin vakiolla C. Jos siis onnistutaan määräämään F eksaktisuusehdoista $\partial F/\partial x = M$ ja $\partial F/\partial y = N$, niin on löydetty yhtälön (1.13) ratkaisut *implisiittimuodossa*

$$F(x,y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Lisäksi yhtälön (1.13) eksaktisuus on helposti tarkistettavissa. Seuraavassa tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:n suorakaiteen muotoista, reiätöntä aluetta (alueen pelkkä reiättömyys riittäisi).

Theorem 1.6 (Eksaktisuuslause). *Olkoot $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ jatkuvasti derivoituvia funktioita suorakaiteen muotoisessa, reiättömässä alueessa $R \subset \mathbb{R}^2$.*

Tällöin yhtälö (1.13) on eksakti alueessa R tasan silloin kun pätee

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in R. \tag{1.16}$$

Proof. Olkoon aluksi DY (1.13) eksakti ja F sen potentiaali alueessa R. Derivoimisjärjestyksen vaihdon sallivan säännön (kts. analyysi) nojalla

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in R.$$

Tässä päättelyssä R:n muodolla ei ollut väliä.

Päteköön sitten (1.16). Kinnitetään piste $(x_0, y_0) \in R$ ja määritellään $F : R \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + g(y),$$

jossa g on mielivaltainen derivoituva funktio. Tällöin R:ssä pätee

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y).$$

Vielä on valittava g sellaiseksi että eksaktisuuden toinenkin ehto (1.14) toteutuu. Derivoidaan F muuttujan y suhteen ja käytetään oletusta (1.16). Tunnetusti derivointi voidaan tehdä integraalin alla (kts. analyysi), joten saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(s,y)\,ds + g'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial s} N(s,y)\,ds + g'(y)$$
$$= N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y).$$

Riittää siis valita sellainen g että

$$g'(y) = N(x_0,y), \quad \text{vaikka} \quad g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt.$$

Siten on löytynyt R:ssä potentiaali F,

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt. \tag{1.17}$$

Tämä todistuksen osa nojasi vahvasti suorakaidemuotoon ja R:n reiättömyyteen.

□

Huom. 1. Yhtä hyvin potentiaali (1.17) voidaan kirjoittaa muodossa

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt. \tag{1.18}$$

Huom. 2. Eksaktisuuslause pätee yleisemmin yhdesti yhtenäisessä (=reiättömässä) alueessa. Todistus nojaa topologiaan.

Eksaktin yhtälön ratkaisumenetelmä

(1) Todetaan yhtälön (1.13) eksaktisuus kriteerillä (1.16). Jos se pätee reiättömässä suorakaiteessa $R \subset \mathbb{R}^2$, niin potentiaali siinä voidaan kirjoittaa teoreeman todistusta mukaillen muodoissa (myös h on derivoituva funktio)

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + g(y) = h(x) + \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt.$$

(2) Integroidaan $\int M(x,y)\,dx$ (tai vaihtoehtoisesti $\int N(x,y)\,dy$, jos kevyempi laskea); integroimisvakiosta ei tarvitse välittää, sillä se tulee sisältymään funktioon $g(y)$. Kirjoitetaan $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$ (tai $F(x,y) = h(x) + \int N(x,y)\,dy$).

(3) *Mikäli yhtälö (1.13) on todella eksakti, niin seuraavaksi kirjoitettava yhtälö*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

riippuu vain muuttujasta y (ei x:stä). Siitä saadaan integroimalla funktio $g(y)$. Itse asiassa riippumattomuus x:stä on yhtäpitävä eksaktisuuden kanssa (kts. teoreeman todistus). Vastaavasti $\frac{\partial F}{\partial x} = h'(x) + \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\,dy = M(x,y)$ riippuu vain x:stä. Saadaan $h(x)$.

Kummassakin tapauksessa saadaan potentiaali F.

(4) Kirjoitetaan implisiittiratkaisu (1.15), $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Aikaisemmin on päätelty, että se antaa yhtälön (1.13) kaikki ratkaisut. Jos kohtuudella onnistuu, ratkaistaan siitä $y = y(x)$ eksplisiittisesti. Joskus ratkaistaan käänteisfunktio $x = x(y)$.

Esimerkki 1.7. Tarkastellaan muotoa (1.13) olevaa yhtälöä

$$y'(1 + xe^y + xye^y) + (ye^y + 2) = 0,$$

jossa siis $M = ye^y + 2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja $N = 1 + xe^y + xye^y \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Seurataan ratkaisumenetelmän vaiheita.

$$(1) \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = e^y + ye^y - (e^y + ye^y) = 0 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suorakaiteeksi voidaan valita $R = \mathbb{R}^2$. Yhtälö on eksakti siinä.

$$(2) \quad F(x,y) = \int (ye^y + 2)\,dx + g(y) = xye^y + 2x + g(y)$$

Selvästi helpompi integrointi!

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + xye^y + g'(y) = 1 + xe^y + xye^y \Leftrightarrow g'(y) = 1.$$

Yhtälö todellakin riippuu vain y:stä! Saadaan $g(y) = y$, ja se sijoittamalla F.

(4) Implisiittiratkaisu on

$$F(x,y) = xye^y + 2x + y = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

se riittäisi. Eksplisiittisesti saadaan käänteisfunktiot

$$x(y) = \frac{C - y}{2 + ye^y}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R} \text{ (miksi?)}.$$

Esimerkki 1.8. (a) $y + xy' = 0$. Joukossa jossa $x \neq 0$, se voidaan kirjoittaa $y' = -y/x$, ja siten käsitellä separoituvana yhtälönä. Toisaalta

$$M + Ny' = y + xy' = 0$$

ja

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 1 = 0 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Yhtälö on eksakti suorakaiteessa $R = \mathbb{R}^2$. Eteenpäin:

$$F(x,y) = h(x) + \int x\,dy = h(x) + xy,$$

josta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = h'(x) + y = y \Leftrightarrow h'(x) = 0$$

(riippuu vain x:stä!), josta $h(x) \equiv 0$. Implisiittiratkaisu on

$$F(x,y) = xy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$M + Ny' = (y - 3x^2) + (x - 1)y' = 0,$$

jossa selvästi $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Koska $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 1 - 1 = 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, yhtälö on eksakti suorakaiteessa $R = \mathbb{R}^2$. Niinpä:

$$F(x,y) = h(x) + \int (x-1)\,dy = h(x) + xy - y,$$

josta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = h'(x) + y = y - 3x^2 \Leftrightarrow h'(x) = -3x^2,$$

riippuu vain x:stä!. Saadaan $h(x) = -\int 3x^2\,dx = -x^3$. Implisiittiratkaisu on

$$F(x,y) = -x^3 + xy - y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eksplisiittisesti

$$y(x) = \frac{C + x^3}{x-1}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

Esimerkki 1.9 (Separoituva yhtälö on eksakti). Tarkastellaan separoituvaa yhtälöä

$$y' = p(x)q(y).$$

Funktion g nollakohdat olkoot suuruusjärjestyksessä $y_1, \cdots, y_K$. Kun $y(x) \neq y_k$, $k = 1, \cdots, K$, niin

$$y' = p(x)q(y) \Leftrightarrow p(x) - \frac{1}{q(y)}y' = M + Ny' = 0,$$

ja $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 0 - 0 = 0$. Siten yhtälö on eksakti suorakaiteissa

$$R = \mathbb{R}\times]y_k, y_{k+1}[, \quad k = 0, \cdots, K \quad (y_0 = -\infty,\ y_{K+1} = \infty).$$

Esimerkki 1.10. Yhtälö

$$M + Ny' = (x + 3x^3 \sin y) + (x^4 \cos y)y' = 0 \tag{1.19}$$

ei ole eksakti, sillä $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 3x^3 \cos y - 4x^3 \cos y = -x^3 \cos y$ ei ole nolla missään $\mathbb{R}^2$:n *avoimessa joukossa, erityisesti alueessa.* Kerrotaan yhtälö (1.19) puolittain funktiolla $\mu(x) = 1/x$, jolloin saadaan ainakin alueissa $D_1 = \{(x,y) \,|\, x > 0\}$ ja $D_2 = \{(x,y) \,|\, x < 0\}$ sen kanssa yhtäpitävä yhtälö

$$\tilde{M} + \tilde{N}y' = (1 + 3x^2 \sin y) + (x^3 \cos y)y' = 0.$$

Tämä on eksakti tasossa $\mathbb{R}^2$, sillä $\partial\tilde{M}/\partial y - \partial\tilde{N}/\partial x = 3x^2 \cos y - 3x^2 \cos y = 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Funktiota $\mu(x) = 1/x$ kutsutaan yhtälön (1.19) *integroivaksi tekijäksi.*

Theorem 1.7. *Tarkastellaan yhtälöä (1.13), $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, jossa pätee $M, N \in C^1(D)$. Jos funktio*

$$h(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) \tag{1.20}$$

riippuu vain x:stä eli on y:n suhteen vakiofunktio, niin yhtälöllä (1.13) on integroiva tekijä

$$\mu(x) = \exp\Big(\int h(x)\, dx\Big). \tag{1.21}$$

Vastaavasti, jos funktio

$$g(y) = \frac{1}{M(x,y)}\Big(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\Big) \tag{1.22}$$

riippuu vain y:stä, niin yhtälöllä (1.13) on integroiva tekijä

$$\mu(y) = \exp\Big(\int g(y)\, dy\Big). \tag{1.23}$$

Proof. Oletetaan että (1.20) pätee (tapaus (1.22) on aivan symmetrinen). Tällöin mielivaltaiselle derivoituvalle funktiolle $\mu(x)$ pätee

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)M(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)N(x,y)) \\
=&\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \mu'(x)N(x,y) - \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \\
=&\mu(x)\Big(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\Big) - \mu'(x)N(x,y) \\
=&\mu(x)h(x)N(x,y) - \mu'(x)N(x,y) \\
=&\big(\mu(x)h(x) - \mu'(x)\big)N(x,y).
\end{aligned}$$

Siispä $\mu(x)$ on integroiva tekijä tasan silloin, kun se toteuttaa separoituvan yhtälön $\mu'(x) = h(x)\mu(x)$. Tämän eräs nollasta poikkeava ratkaisu on (1.21).

□

Esimerkki 1.11. Sovelletaan lausetta 1.7 edellisen esimerkin yhtälöön (1.19):

$$h(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = \frac{-x^3\cos y}{x^4\cos y} = -\frac{1}{x},$$

joten saadaan integroiva tekijä

$$\mu(x) = \exp\Big(-\int \frac{dx}{x}\Big) = e^{-\ln|x|} = 1 : e^{\ln|x|} = \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Koska etumerkki voidaan vaihtaa (koskee nyt arvoja $x < 0$), voidaan valita $\mu(x) = 1/x$ ($x \neq 0$), siis juuri se joka annettiin esimerkissä 1.10.

Ratkaistaan (1.19) loppuun asti. Saadaan ainakin alueissa $D_1 = \{(x,y) \,|\, x > 0\}$ ja $D_2 = \{(x,y) \,|\, x < 0\}$ sen kanssa yhtäpitävä yhtälö

$$\tilde{M} + \tilde{N}y' = (1 + 3x^2\sin y) + (x^3\cos y)y' = 0, \tag{1.24}$$

joka on, kuten nähtiin, eksakti koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Lasketaan sen potentiaali:

$$F(x,y) = \int \tilde{M}\, dx + g(y) = x + x^3\sin y + g(y),$$

josta

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 \cos y + g'(y) = \tilde{N} = x^3 \cos y \Leftrightarrow g'(y) = 0,$$

ja saadaan $g(y) \equiv 0$, potentiaali F ja yhtälöiden (1.19) ja (1.24) implisiittiratkaisu

$$F(x, y) = x + x^3 \sin y = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Huom.1. Teoria sanoo että implisiittiratkaisu (1.25) antaa tasan (1.24):n kaikki ratkaisut $y = y(x)$. Voidaan päätellä, että tällä kertaa yhtälöillä (1.19) ja (1.24) on tasan samat ratkaisut, myös pisteessä $x = 0$.

Huom.2. Muotoa (1.13) olevalla yhtälöllä, jos se ei ole valmiiksi eksakti, voi olla integroiva tekijä $\mu(x, y)$, joka riippuu kummastakin muuttujasta x ja y. Tällaisen löytämiseksi ei ole kuitenkaan mitään yksinkertaista yleiskeinoa.

1.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt

Toistaiseksi on tutkittu hyvin yleistä muotoa olevia 1. kl. differentiaaliyhtälöitä. Seuraavaksi tutkitaan jatkonkin kannalta tärkeää erikoistapausta, *lineaarista* ensimmäisen kertaluvun yhälöä. Se on muotoa (standardimuoto LY)

$$\big(Ly\big)(x) = y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \tag{1.26}$$

ja sitä vastaava *homogeeniyhtälö* (HY) kuuluu

$$\big(Ly\big)(x) = y'(x) + p(x)y(x) = 0. \tag{1.27}$$

Kerroinfunktiot p ja q oletetaan jatkuviksi jollain reaalivälillä, ja pyrkimys on löytää ratkaisu kyseisellä koko välillä eli globaalisti (mikä, kuten nähdään, tulee onnistumaan). Nimitys lineaarinen tulee siitä, että kuvaus $y \mapsto Ly$ on *lineaarinen differentiaalioperaattori* (=funktioavaruuksien välinen lineaarikuvaus). Nimittäin derivoituville funktioille y, y_1 ja y_2 sekä vakiolle a pätee:

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= Ly_1 + Ly_2 \\ L(ay) &= aLy. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Proof. Olkoon myös b vakio. Käyttäen tunnettuja derivopimissääntöjä saadaan

$$\begin{aligned} L(ay_1 + by_2) &= \frac{d}{dx}(ay_1 + by_2) + p(x)(ay_1 + by_2) = ay_1' + by_2' + apy_1 + bpy_2 \\ &= a(y_1' + py_1) + b(y_2' + py_2) = aLy_1 + bLy_2. \end{aligned}$$

□

Lineaarinen yhtälö ei yleensä ole valmiiksi eksakti, mutta lauseen 1.6 mukainen integroiva tekijä löytyy. Nimittäin

$$Ly = q \Leftrightarrow M + Ny' = \big(p(x)y - q(x)\big) + 1y' = 0,$$

joten

$$h(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = p(x)$$

riippuu vain x:stä. Lauseen 1.7 mukainen integroiva tekijä on $\mu(x) = \exp\big(\int p(x)\,dx\big)$, ja saadaan yhtäpitävä eksakti yhtälö $\tilde{M} + \tilde{N}y' = \mu M + \mu N y' = 0$. Siis lineaarinen 1. kl. yhtälö, kuten separoituvakin, voidaan aina ratkaista eksaktina yhtälönä.

Integroiva tekijä löytyy suorempaakin, helposti muistettavalla tavalla: Olkoot $\mu(x)$ ja $y(x)$ mielivaltaisia derivoituvia funktioita. Tällöin

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big) = \mu y' + \mu' y = \mu L y = \mu y' + p(x)\mu y \Leftrightarrow \mu' = p(x)\mu.$$

Tämän separoituvan yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa koreilemattomasti

$$\mu(x) = \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big), \tag{1.29}$$

tai alkuarvotehtävää ajatellen voidaan poimia yksittäisratkaisu

$$\mu(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\Big). \tag{1.30}$$

Lineaarisen 1. kl. yhtälön ratkaisumenetelmä

Integroivan tekijän (1.29) tai (1.30) avulla lineaarinen yhtälö (1.26-27) ratkeaa helposti:

$$\begin{aligned}
&Ly = q \Leftrightarrow \mu y' + p(x)\mu y = \mu q(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big) = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow \\
&y(x) = \frac{1}{\mu}\Big(\int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\,dt + C\Big) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds} q(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Ratkaisumenetelmän antama tulos voidaan haluttaessa kirjoittaa valmiina kaavana:

Theorem 1.8. *Lineaarisen 1. kl. DY:n (1.26) yleinen ratkaisu on*

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{t}^{x} p(s)\,ds} q(t)\,dt, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

Proof. Ratkaisumenetelmä ja huomio

$$-\int_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{t} = -\Big(\int_{x_0}^{x} + \int_{t}^{x_0}\Big) = -\int_{t}^{x}.$$

□

Huom. Ratkaisu (1.31) pätee kaikilla x, joilla kerroinfunktiot p ja q ovat jatkuvia (yleisemmin: integraalit ovat olemassa).

Corollary 1.9. *AAT:n*

$$Ly = y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

ratkaisu on

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\, ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_t^x p(s)\, ds} q(t)\, dt. \tag{1.32}$$

Proof. $y_0 = y(x_0) = Ce^0 + 0 = C$. □

Esimerkki 1.12. Ratkaistaan AAT

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x, \quad y(\pi/2) = 3.$$

Siirrytään ensimmäiseksi standardimuotoon

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x.$$

Yhtälö on lineaarinen; $p(x) = -2/x$ ja $q(x) = x^2 \cos x$. Sen integroiva tekijä (1.29) on

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Ratkaisumenetelmän mukaisesti saadaan yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned}
&y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \cos x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}y\Big) = \cos x \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{x^2}y = \int \cos x\, dx = \sin x + C \Leftrightarrow y(x) = x^2 \sin x + Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}$$

Alkuehto: $3 = y(\pi/2) = (\pi^2/4)\big(\sin(\pi/2) + C\big) = (\pi^2/4)(1 + C) \Leftrightarrow C = 12/\pi^2 - 1$. Siten AAT:n ratkaisu on

$$y(x) = x^2\Big(\sin x + \frac{12}{\pi^2} - 1\Big), \quad x > 0 \text{ (koska } \frac{\pi}{2} > 0).$$

Seuraavat lauseet ovat suora seuraus yhtälöiden (1.26) ja (1.27) lineaarisuudesta.

Theorem 1.10 (Superpositioperiaate)**.** *Olkoot y_1 ja y_2 homogeeniyhtälön (1.27) ratkaisuja ja a sekä b vakioita. Tällöin myös $y = ay_1 + by_2$ on kyseisen yhtälön ratkaisu.*

Proof. Lineaarisuudesta (1.28) saadaan

$$Ly = L(ay_1 + by_2) = aLy_1 + bLy_2 = a * 0 + b * 0 = 0.$$

□

Huom. HY:n (1.27) ratkaisut on lineaarikuvauksen L ydin, siten aliavaruus; se voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti $y = Cy_0$, $C \in \mathbb{R}$, jossa $y_0(x) = \exp(-\int p(x)\, dx)$.

Theorem 1.11. *Olkoon Cy_0 homogeeniyhtälön (1.27) yleinen ratkaisu ja olkoon y_1 täydellisen yhtälön (1.26) (LY) jokin yksittäisratkaisu. Tällöin*

$$y(x) = Cy_0(x) + y_1(x), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.33}$$

on LY:n (1.26) yleinen ratkaisu. Itse asiassa siitä saadaan kaikki ratkaisut.

Proof. Oletuksen mukaan $Ly_0 = 0$ ja $Ly_1 = q$. Siten

$$Ly = L(cy_0 + y_1) = CLy_0 + Ly_1 = 0 + q = q,$$

joten muotoa (1.33) oleva y on LY:n ratkaisu.

Kääntäen, olkoon y_2 jokin LY:n ratkaisu: $Ly_2 = q$. Tällöin

$$L(y_2 - y_1) = Ly_2 - Ly_1 = q - q = 0,$$

joten jollakin $C \in \mathbb{R}$ pätee $y_2 - y_1 = Cy_0$, siis $y_2 = Cy_0 + y_1$. $\square$

Huom.1. Lauseiden 1.10 ja 1.11 oleellinen sisältö pätee myös korkeamman kertaluvun lineaarisille yhtälöille ja lineaarisille systeemeille; se näyttelee niiden ratkaisumenetelmissä keskeistä osaa.

Huom.2. Yleisessä ratkaisussa (1.31) termi $C \exp\big(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\big)$, $C \in \mathbb{R}$, on HY:n (1.27) yleinen ratkaisu ja funktio $\int_{x_0}^{x} \exp\big(-\int_{t}^{x} p(s)\,ds\big) q(t)\,dt$ on LY:n (1.26) yksittäisratkaisu.

Huom.3. Lause 1.11 tarjoaa erään tavan ratkaista lineaarinen yhtälö: Muodostetaan HY:n yleinen ratkaisu, LY:lle etsitään vaikka kokeilemalla yksittäisratkaisu ja summataan nämä.

Esimerkki 1.13. Ratkaistaan juuri mainitulla tavalla lineaarinen yhtälö $y' + 2y = 3e^x$. Vastaava HY on separoituva,

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \text{ (kun } y \neq 0) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow \\
&\ln|y| = -2x + C_1 \Leftrightarrow |y| = C_2 e^{-2x} \quad (C_2 = e^{C_1} > 0) \Leftrightarrow y = C_3 e^{-2x} \quad (C_3 = \pm C_2 \neq 0).
\end{aligned}$$

Lisäksi on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$; se kuitenkin saadaan C:n arvosta nolla. Siten HY:n yleinen ratkaisu on $y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Etsitään LY:lle yksittäisratkaisu yritteellä $y = Ae^x$, jossa A on parametri (nk. *määräämättömien kertoimien menetelmä*). Sijoittamalla tämä saadaan

$$y' + 2y = Ae^x + 2Ae^x = 3e^x \Leftrightarrow 3Ae^x = 3e^x \Leftrightarrow A = 1,$$

joten $y = e^x$ on LY:n yksittäisratkaisu. Lauseen 1.11 mukaan LY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = e^x + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.5 Sijoitukset ja muunnokset

Olemme käsitelleet separoituvia, eksakteja ja lineaarisia yhtälöitä. Kaikki 1. kl. yhtälöt eivät ole sellaisia, mutta erilaisilla muunnoksilla osa palautuu sellaiseksi. Seuraavassa tarkastellaan neljää klassista tapausta.

1.5.1 Bernoullin yhtälö

Bernoullin yhtälö on muotoa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^{\lambda}, \tag{1.34}$$

jossa λ on reaalinen parametri (kertoimet p ja q jatkuvia). Kun $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$, yhtälö on lineaarinen, joten voidaan olettaa että $\lambda \neq 0$ ja $\lambda \neq 1$. Jos $\lambda > 0$, niin yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$. OY-lauseen 1.2 ehdot toteutuvat varmasti, kun $y > 0$, mutta eivät yleensä pisteissä $(x, 0)$ (poikkeuksiakin on, esimerkiksi $\lambda = 4/3$, muttei $\lambda = 1/3$; miksi?).

Ratkaisut $y = y(x)$, joissa $y(x) \neq 0$, saadaan yhtälöstä

$$y^{-\lambda}y' + p(x)y^{1-\lambda} = q(x). \tag{1.35}$$

Tehdään siihen sijoitus (muunnos)

$$z(x) = y(x)^{1-\lambda}, \tag{1.36}$$

jolloin saadaan - koska yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan

$$z'(x) = (1 - \lambda)y(x)^{-\lambda}y'(x)$$

- funktiolle z (muunnoksen kautta) (1.35):n kanssa yhtäpitävä lineaarinen yhtälö

$$\frac{1}{1-\lambda}z' + p(x)z = q(x). \tag{1.37}$$

Esimerkki 1.14. Tarkastellaan yhtälöä $y' - 5y = -(5/2)xy^3$. Se on Bernoulli, $\lambda = 3 > 0$, ja tällä kertaa OY-lauseen 1.2 ehdot on täytetty koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Sillä on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$, ja kaikki muut ratkaisut saadaan yhtälöstä (1.35), siis yhtälöstä (1.37).

Jakamalla $y^{-3}y' - 5y^{-2} = -(5/2)x$. Tehdään siis sijoitus $z(x) = y(x)^{-2} \Leftrightarrow y(x) = \pm z(x)^{-1/2} = \pm 1/\sqrt{z(x)}$, jolloin $z' = -2y^{-3}y'$, ja saadaan yhtälö $-(1/2)z' - 5z = -(5/2)x$, normaalimuodossa $z' + 10z = 5x$. Tämän integroiva tekijä on $\mu(x) = \exp\big(\int 10\,dx\big) = \exp(10x)$. Lasketaan (lopussa osittaisintegrointi):

$$\begin{aligned}
&z' + 10z = 5x \Leftrightarrow e^{10x}z' + 10e^{10x}z = 5xe^{10x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\big(e^{10x}z\big) = 5xe^{10x} \Leftrightarrow e^{10x}z = \int 5xe^{10x}\,dx \\
&\Leftrightarrow z = \frac{e^{-10x}}{2}\int x * 10e^{10x}\,dx = \frac{e^{-10x}}{2}\Big(xe^{10x} - \int e^{10x}\,dx\Big) = \frac{e^{-10x}}{2}\Big(xe^{10x} - \frac{e^{10x}}{10} + C_1\Big) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.
\end{aligned}$$

Siten alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = \pm z(x)^{-1/2} = \pm 1 : \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$ (eikä sitten muita). Nämä ratkaisut todella peittävät toisiaan leikkaamatta tason $\mathbb{R}^2$, kuten OY-lause 1.2 edellyttääkin.

1.5.2 Tasa-asteiset yhtälöt

Olkoon funktio f annettu. Muotoa

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \tag{1.38}$$

oleva differentiaaliyhtälö on *tasa-asteinen* . Siihen tehdään sijoitus

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad x \neq 0, \tag{1.39}$$

jolloin $xz = y$, $y' = z + xz'$, ja yhtälö saa muodon

$$z(x) + xz'(x) = f(z(x)) \Leftrightarrow xz' = f(z) - z \text{ (kun } x \neq 0) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big).$$

Tasa-asteinen yhtälö (1.38) palautuu siten muunnoksella (1.39) separoituvaksi yhtälöksi.

Esimerkki 1.15. Yhtälö

$$y' = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \quad (x \neq 0)$$

on tasa-asteinen. Tehdään sijoitus $z(x) = y(x)/x$, jolloin $xz = y$, $y' = z + xz'$, ja saadaan arvoilla $x \neq 0$ yhtäpitävästi

$$\begin{aligned}&z + xz' = z + z^2 + 1 \Leftrightarrow xz' = 1 + z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\ &\arctan z = \ln|x| + C \Leftrightarrow z(x) = \tan\big(\ln|x| + C\big),\end{aligned}$$

joten yleinen ratkaisu on

$$y(x) = xz(x) = x\tan\big(\ln|x| + C\big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.5.3 Muotoa $y' = f(ax + by)$ olevat yhtälöt

Olkoot funktio f ja vakiot a sekä b annettuja. Voidaan olettaa että $b \neq 0$. Tarkastelussa on muotoa

$$y'(x) = f(ax + by) \tag{1.40}$$

oleva yhtälö; erityistä siinä on että tunnettuun funktioon f on sijoitettu ensimmäisen asteen homogeeninen lauseke $ax + by$. Tällaiseen tehdään sijoitus

$$z(x) = ax + by(x), \tag{1.41}$$

jolloin $y = (1/b)(z - ax)$, $y' = (1/b)(z' - a)$, ja yhtälö saa muodon

$$(1/b)(z' - a) = f(z) \Leftrightarrow z' = a + bf(z).$$

Se siis palautui separoituvaksi yhtälöksi.

Esimerkki 1.16. Yhtälö

$$y' = y - x - 1 + \frac{1}{x - y + 2} = f(x - y), \quad x - y + 2 \neq 0,$$

on kyseistä muotoa, ja $f(z) = -z - 1 + 1/(z+2)$. Sijoitetaan $z(x) = x - y(x)$, jolloin $y = x - z$, $y' = 1 - z'$, ja saadaan yhtäpitävästi

$$1 - z' = -z - 1 + \frac{1}{z+2} \Leftrightarrow z' = (z+2) - \frac{1}{z+2} = \frac{(z+2)^2 - 1}{z+2}.$$

Kannatta tehdä vielä sijoitus $u(x) = z(x) + 2$, jolloin $z = u - 2$, $z' = u'$, ja saadaan

$$u' = \frac{u^2 - 1}{u} \text{ (kun } u \neq \pm 1\text{)} \Leftrightarrow \frac{u\,du}{u^2 - 1} = dx \Leftrightarrow \int \frac{u\,du}{u^2-1} = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|u^2 - 1| = x + C_1$$

$$\Leftrightarrow |u^2 - 1| = e^{\ln|u^2-1|} = e^{2x + C_2} = C_3 e^{2x} \Leftrightarrow u^2 - 1 = C_4 e^{2x} \quad (C_4 \neq 0).$$

Kun vielä otetaan huomioon triviaaliratkaisut $u \equiv \pm 1$, saadaan $u^2 = 1 + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$, joten implisiittiratkaisu on

$$(x - y + 2)^2 = 1 + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad 1 + Ce^{2x} \neq 0.$$

1.5.4 Tasa-asteiseksi palautuvat yhtälöt

Olkoot funktio f ja vakiot a_k, b_k ja c_k annettuja. Tarkastellaan muotoa

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y(x) + c_1}{a_2 x + b_2 y(x) + c_2}\right) \tag{1.42}$$

olevaa yhtälöä. Palautetaan se tasa-asteiseksi, jolloin se osataan ratkaista. Tehdään sekä funktion y että vapaan muuttujan x muuntava sijoitus (α ja β parametreina)

$$\begin{aligned} x &= t + \alpha, \\ y(x) &= z(t) + \beta = z(x - \alpha) + \beta, \end{aligned} \tag{1.43}$$

jolloin $y'(x) = z'(x - \alpha) = z'(t)$ ja

$$a_k x + b_k y(x) + c_k = a_k t + b_k z(t) + (a_k\alpha + b_k\beta + c_k), \quad k = 1, 2.$$

Pyritään valitsemaan parametrit α ja β sellaisiksi että

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Se onnistuu (yksikäsitteisesti), jos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Jos kuitenkin $a_1 b_2 = a_2 b_1$, niin $a_1/a_2 = b_1/b_2 = d$ (tapaukset $a_2 = 0$ tai $b_2 = 0$ palautuvat helpoiksi yhtälöiksi), ja

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = \frac{d(a_2 x + b_2 y) + c_1}{(a_2 x + b_2 y) + c_2},$$

joten yhtälö (1.42) on muotoa $y' = g(a_2 x + b_2 y)$, eli kuten edellisessä tapauksessamme. Jos ei kuitenkaan näin, niin yhtälöparilla (1.44) on yksikäsitteinen ratkaisu (α, β). Näillä arvoilla yhtälö (1.42) saa yhtäpitävän muodon

$$z'(t) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z(t)}{a_2 t + b_2 z(t)}\right) \text{ (kun } t \neq 0) = f\left(\frac{a_1 + b_1 z(t)/t}{a_2 + b_2 z(t)/t}\right) = g\left(\frac{z(t)}{t}\right).$$

Se palautui siis tasa-asteiseksi.

Esimerkki 1.17. Yhtälö

$$y' = \frac{y - x + 1}{x + y}, \quad x + y \neq 0,$$

on muotoa (1.42), ja $a_1 = -1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ ja $c_2 = 0$. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöpari (1.44),

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1/2 \\ \alpha + \beta = 0 \qquad & \alpha + \beta = 0 \qquad \beta = -1/2. \end{aligned}$$

Siten sijoitus

$$\begin{aligned} x &= t + 1/2 \\ y(x) &= z(t) - 1/2 = z\big(x - 1/2\big) - 1/2 \end{aligned}$$

toimii. Saadaan $y'(x) = z'(t)$ ja edelleen

$$z'(t) = \frac{-t + z(t)}{t + z(t)} \text{ (kun } t \neq 0) = \frac{-1 + z(t)/t}{1 + z(t)/t},$$

johon tehdään "tasa-astesijoitus" $u(t) = z(t)/t$. Tällöin $z = tu$, $z' = u + tu'$, ja saadaan

$$\begin{aligned} & u + tu' = \frac{-1 + u}{1 + u} \Leftrightarrow tu' = \frac{u - 1}{u + 1} - u = -\frac{u^2 + 1}{u + 1} \text{ (kun } t \neq 0,\ u \neq -1) \Leftrightarrow \\ & \frac{u + 1}{u^2 + 1}\, du = -\frac{dt}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2u\, du}{u^2 + 1} + \int \frac{du}{u^2 + 1} = -\int \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \\ & \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + \arctan u = -\ln|t| + C_1 \Leftrightarrow \ln\Big((u^2 + 1)^{1/2} \exp(\arctan u)\Big) = \ln\left(\frac{C_2}{|t|}\right), \end{aligned}$$

josta takaisin sijoittamalla saadaan implisiittiratkaisu

$$\left(\left(\frac{2y + 1}{2x - 1}\right)^2 + 1\right)^{1/2} \exp\left(\arctan\left(\frac{2y + 1}{2x - 1}\right)\right) = \frac{C}{|2x - 1|}, \quad C > 0, \quad x \neq 1/2,\ x + y \neq 0.$$

1.6 Numeerinen ratkaiseminen

Useimpia 1.kl. differentiaaliyhtälöitä ei käytännössä pystytä ratkaisemaan suljetussa muodossa, vaikka yhtälö olisikin annettu eksplisiittisesti; kyse ei ole yhdestäkään edellä esitellystä tapauksesta. Lisäksi jossain sovelluksissa yhtälön määrittelevä funktio, siis f tai F, voidaan tuntea vain mittaustuloksena. Ainakin silloin joudutaan turvautumaan numeeriseen keinoon. Näitä on melkomoinen määrä, yksi sopien paremmin yhteen yhtälötyyppiin toinen paremmin toiseen, ja valtaosa niistä löytyy matematiikkaohjelmista valmiiksi hioittuina rutiineina. Seuraavassa esitellään lyhyesti, ikään kuin ideoita havainnollistava mallina "kaikkien numeeristen DY-menetelmien äiti", *Eulerin menetelmä*. Ratkaistavana on normaalimuotoinen AAT

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = x_0, \tag{1.45}$$

jossa $(x_0, y_0) \in D$, ja D on $\mathbb{R}^2$:n alue. Jos f on kyllin säännöllinen, niin OY-lauseen 1.3 mukaan AAT:llä on yksikäsitteisesti määrätty, alueessa D kulkeva maksimaaliratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Otetaan tavoitteeksi laskea sen arvo pisteessä $\bar{x} \in I$. Oletetaan että $\bar{x} > x_0$ (tapaus $\bar{x} < x_0$ hoituu vastaavalla tavalla). Pisteessä $x \in [x_0, \bar{x}]$ ratkaisukäyrän suuntakulman tangentti on $y'(x) = f(x, y(x))$, joten pienellä $h > 0$ voidaan arvioida (funktion y differentiaali)

$$y(x + h) - y(x) \approx f(x, y(x))h. \tag{1.46}$$

Siispä jos tiedetään ratkaisukäyrän piste $(x, y(x))$, niin siitä käsin voidaan arvioida käyrän pistettä $(x + h, y(x + h))$.

Jaetaan väli $[x_0, \bar{x}]$ tiheähköstі osaväleihin pisteillä $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = \bar{x}$ (osavälejä N kappaletta). Yksinkertaisin on tasavälinen jako

$$x_k = x_0 + kh, \quad h = \frac{\bar{x} - x_0}{N}, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{1.47}$$

Aloitetaan pisteestä (x_0, y_0), käytetään argumentin arvoja (1.47) ja jatketaan aina seuraavaan soveltaen arviota (1.46). Silloin saadaan Eulerin keinon mukainen arvojen jono (y_k), $k = 1, \cdots, N$, jossa

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k), \quad k = 0, \cdots, N - 1. \tag{1.48}$$

Niiden on tarkoitus approksimoida $y_k \approx y(x_k)$, erityisesti $y_N \approx y(\bar{x})$. Siis ratkaisukäyrä vähän kuin korvataan murtoviivalla, jossa pisteestä (x_k, y_k) lähtevän janan suuntakulman tangentti on aina $f(x_k, y_k)$.

Oletetaan että f on jautkuvasti derivoituva D:ssä. Silloin derivoinnin ketjusäännön nojalla ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva (todenna se). Oletetaan että ratkaisukäyrä sisältyy argumentin arvoilla $x \in [x_0, \bar{x}]$ suorakulmioon $K = [x_0, \bar{x}] \times [-c, c] \subset D$ (jollakin $c > 0$). Olkoot

$$L = \max_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \quad \text{ja} \quad M = \max_{x \in [x_0, \bar{x}]} |y''(x)|. \tag{1.49}$$

Vakiot L ja M ovat jatkuvuuden nojalla äärellisiä (jatkuvan funktion maksimi kompaktissa joukossa). Lisäksi L voidaan valita aidosti positiiviseksi. Voidaan osoittaa, että tällöin Eulerin menetelmälle pätee virhearvio

$$|y(x_k) - y_k| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L|\bar{x} - x_0|} - 1\right), \quad k = 1, \cdots, N. \tag{1.50}$$

Oikeastaan arvio (1.50) edellyttää, että h on kyllin pieni. Joka tapauksessa virheen yläraja on suoraan verrannollinen askelpituuteen h, erityisesti $y_N \to y(\bar{x})$ nopeudella h potenssiin yksi, kun $h \to 0$ eli $N \to \infty$. Kyse on nk. *ensimmäisen asteen menetelmästä*. Paremmat ovat nopeampia, esimerkiksi klassinen Runge-Kutta on 4. asteen menetelmä.

Esimerkki 1.18. Ratkaistaan AAT

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4.$$

Ensiksikin yhtälö on separoituvana helppo ratkaista suljetussa muodossa, ja AAT:n ratkaisuksi saadaan $y(x) = (1/16)(x^2 + 7)^2$.

Ratkaistaan sama AAT Eulerin menetelmällä pisteessä 3/2, tai oikeastaan siis välillä $[1, 3/2]$. Valitaan $h = 1/10$ eli $N = 5$. Nyt $(x_0, y_0) = (1, 4)$, ja Eulerin keino antaa jonon $(1, 4)$, $(1.1, 4.2)$, $(1.2, 4.42543)$, $(1.3, 4.67787)$, $(1.4, 4.95904)$, $(1.5, 5.27081)$. Siis erityisesti $y_5 = 5.27081$. Vertailun vuoksi tarkka arvo on $y(3/2) = 5.34766...$. Käsipelissä laskettavat arvot kannattaa taulukoida järkevästi.

Huom.1. Kaikki numeeriset ratkaisukeinot käyttävät normaalimuotoa (1.45). Kuten sanottu, Eulerin menetelmä kelpaa vain teorian havainnollistamiseen; on paljon tehokkaampia muita menetelmiä.

Huom.2. Myös differentiaaliyhtälösysteemejä (monta yhtälöä) voidaan ratkaista numeerisin keinoin, eikä systeemiin siirtyminen liioin mutkista keinoja. Systeemejä tutkitaan kurssissa Differentiaaliyhtälöt II.

Huom.3. Myös korkeamman kertaluvun yhtälöitä ja systeemejä voidaan ratkaista numeerisin keinoin. Ne palautetaan ensin 1.kl. systeemeiksi, helpolla tavalla joka esitetään kurssissa Differentiaaliyhtälöt II.

2 Sovelluksia

2.1 Sekoitusmallit

Esitellään sekoitusongelma esimerkin avulla. Astiassa A on alkuhetkellä $t_0 = 0$ vettä tai suolavettä määrä V_0 litraa, jossa suolan määrä $x_0\,(kg)$. Siihen virtaa astiasta B suolaliuosta vakionopeudella $F_{in}\,(l/min)$. Tämän liuoksen suolapitoisuus olkoon $a\,(kg/l)$. Astian A liuosta sekoiteen yhtenään ja niin hyvin, että se on koko ajan tasalaatuista. Lisäksi astiasta A valuu pois liuosta vakionopeudella $F_{out}\,(l/min)$. Tavoitteena on selvittää astian A liuoksen suolapitoisuus hetkellä $t \geq 0$, siis ajan funktiona.

Tilanteen kuvaa kaksi ajan funktiota:

$V(t) =$$A$:ssa olevan liuoksen määrä litroina hetkellä t.

$x(t) =$$A$:ssa olevan suolan määrä kiloina hetkellä t.

Tällöin kysytty, A:n liuoksen suolapitoisuus hetkellä t, on

$$p(t) = \frac{x(t)}{V(t)}. \tag{2.1}$$

Lisäksi pätevät alkuehdot $V(0) = V_0$ ja $x(0) = x_0$. Funktio V saadaan välittömästi:

$$V(t) = V_0 + \big(F_{in} - F_{out}\big)t. \tag{2.2}$$

Voidaan olettaa että funktio $x(t)$ on jatkuva, silloin myös $p(t)$ on. Muodostetaan x:lle DY. Tarkastellaan x:n muutosta aikavälillä $[t, t+h]$. Se on

$$x(t+h) - x(t) = aF_{in}h - \int_t^{t+h} p(\tau)F_{out}\,d\tau = aF_{in}h - p(\xi)F_{out}h,$$

jossa viimeksi käytetään integraalilaskennan väliarvolausetta, ja sen mukaisesti $\xi = \xi(h) \in]t, t+h[$. Raja-arvona saadaan

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = aF_{in} - \lim_{h\to 0} p(\xi(h))F_{out} = aF_{in} - p(t)F_{out}.$$

Funktiolle saatiin siten 1.kl. lineaarinen DY, joka voidaan yhtälöt (2.1-2) muistaen kirjoittaa muodossa

$$\dot{x}(t) = aF_{in} - \frac{F_{out}}{V_0 + \big(F_{in} - F_{out}\big)t}\, x(t). \tag{2.3}$$

Huom.1. Moni järkevästi kirjoittaa DY:n (2.3) suoraan perustaen ajatukseen, että funktion muutosnopeus on sen derivaatta. Tässä $\dot{x}(t)$ on x:n muutosnopeus, aF_{in} on muutosnopeus tulevan suolan määrässä (kiloina) ja $p(t)F_{out}$ on muutosnopeus poistuvan suolan määrässä (kiloina).

Huom.2. Annetut suureet F_{in}, F_{out} ja a voivat aivan hyvin olla aidosti ajan funktioita, kunhan ne vain tunnetaan. Tällöin

$$V(t) = V_0 + \int_0^t \big(F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau)\big)\, d\tau, \tag{2.4}$$

ja saadaan (kyseessä on funktion x lineaarinen 1.kl. DY; integraali ei koske funktiota x)

$$\dot{x}(t) = a(t)F_{in}(t) - \frac{F_{out}(t)}{V(t)}\, x(t) = a(t)F_{in}(t) - \frac{F_{out}(t)}{V_0 + \int_0^t (F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau))\, d\tau}\, x(t). \tag{2.5}$$

Esimerkki 2.1. Olkoot $V_0 = 1000l$, $F_{in} = F_{out} = 6l/min$, $a = 1kg/l$ ja $x(0) = 0$ (siis aluksi suolatonta). Milloin A:n liuos saavuttaa suolapitoisuuden $p = 1/2\, kg/l$?

Heti kättelyssä $V(t) = V_0 = 1000l$, ja suolan määrälle $x(t)$ saadaan

$$\dot{x} = 6 - \frac{6}{1000}x \Leftrightarrow \dot{x} + \frac{6}{1000}x = 6 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(e^{6t/1000}x\Big) = 6e^{6t/1000} \Leftrightarrow$$
$$e^{6t/1000}x = 6\int e^{6t/1000}\, dt = 1000e^{6t/1000} + C \Leftrightarrow x(t) = 1000 + Ce^{-6t/1000}.$$

Alkuehto: $0 = x(0) = 1000 + C \Leftrightarrow C = -1000$. Siten $x(t) = 1000\big(1 - e^{-6t/1000}\big)$ ja

$$p(t) = \frac{x(t)}{V(t)} = 1 - e^{-6t/1000} = 1/2 \Leftrightarrow e^{6t/1000} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1000\ln 2}{6} min \approx 115.52 min.$$

Huom. $\lim_{t\to\infty} p(t) = 1kg/l = a$.

2.2 Populaatiomallit

2.2.1 Eksponentiaalinen kasvumalli

Olkoon $N(t)$ populaation koko hetkellä t, $N(t) \geq 0$. Oletetaan että populaation koon muutosnopeus on suoraan verrannollinen sen senhetkiseen kokoon verrannollisuuskertoimena (Malthusin parametri) r; $r > 0$ meinaa kasvua, $r < 0$ pienenemistä. Saadaan lineaarinen (myös separoituva) 1.kl. DY (vrt. esimerkki 1.1)

$$\dot{N}(t) = rN(t). \tag{2.6}$$

Alkuehto

$$N(0) = N_0. \tag{2.7}$$

AAT:n (2.6-7) ratkaisu on tunnetusti (ajassa tulevaan päin)

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \geq 0.$$

Usein Malthusin parametri r esitetään erotuksena

$$r = \beta - \mu,$$

jossa β on syntyvyysintensiteetti ja μ on kuolleisuusintensiteetti. Siis aikavälillä $[t, t + dt]$ (dt pieni) kukin yksilö saa keskimäärin $\beta\, dt$ jälkeläistä, ja hän kuolee siinä todennäköisyydellä (tn.) $\mu\, dt$. Tämä tarkoittaa että yksilö tuottaa koko elinikänsä jälkeläisiä tasaiseen tahtiin nopeudella β (mikä on usein karkea oletus), ja että hänen elinikänsä T on tn.-mielessä eksponentiaalisesti jakautunut satunnaismuuttuja (paljon käytetty oletus) parametrinaan μ, mitä merkitään $T \sim Exp(\mu)$. Tällöin tn. että on hengissä ainakin iän t, on

$$P\big(T \geq t\big) = \int_t^{\infty} \mu e^{-\mu\tau}\, d\tau = e^{-\mu t}.$$

Koko Malthusin populaatiomalli voidaan tulkita *stokastisena prosessina* (=tulkinta tn.-mielessä). Deterministinen malli (2.1-2) antaa prosessin *odotusarvon.*

2.2.2 Logistinen malli

Populaation koko $N(t)$. Oletetaan syntyvyys- ja (itsestään)kuolleisuusintensiteetit β ja μ vakioiksi, joten $r = \beta - \mu$ on vakio. Lisäksi oletetaan että yksilöt liikkuvat umpimähkään, törmäävät toisiinsa satunnaisesti vakiointensiteetillä $\alpha > 0$, taistelevat tällöin kohtalokkaasti, ja vain toinen niistä selviää. Tämän seurauksena populaatio harvenee itsestään kuolemisen lisäksi nopeudella $(1/2)\alpha N(t)\big(N(t)-1\big)$ (parien määrä N:n jäsenen joukossa!). Merkitään $r = \beta - \mu + \alpha/2$, jolloin saadaan *logistinen yhtälö*

$$\dot{N}(t) = rN(t) - \frac{1}{2}\alpha N(t)^2. \tag{2.8}$$

Kun vielä merkitään $K = 2r/\alpha$, yhtälö (2.8) voidaan kirjoittaa standardimuodossa

$$\dot{N}(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big). \tag{2.9}$$

Parametria K kutsutaan ympäristön kantokyvyksi syystä, joka selviää kohta.

Yhtälö (2.8-9) on separoituva, mutta lienee mukavampi käsitellä Bernoullin yhtälönä (jossa $\lambda = 2$). Tehdään ennen ratkaisua yhtälölle (2.9) *kvalitatiivinen analyysi*: Sillä on triviaaliratkaisut $N \equiv 0$ ja $N \equiv K$. OY-lauseet 1.2-3, erityisesti Poistumislause, pätevät sille koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Siten muut ratkaisut eivät kohtaa triviaaliratkaisuja. Olkoon $N(0) = N_0 > 0$, ja oletaan että $K > 0$ (yhtäpitävästi $r > 0$). Silloin tarkasteluun jää kaksi tapausta, I: $0 < N_0 < K$ ja II: $N_0 > K$ (jos $N_0 = K$ niin $N \equiv K$). AAT:n (2.9) alkuehtona (2.7) ratkaisuväli olkoon $\Delta = [0, \delta[$ (ei välitetä arvoista $t < 0$).

Tapaus I: $0 < N(t) < K$ kaikilla $t \in \Delta$ (1-käsitteisyys). Poistumislauseesta seuraa että $\delta = \infty$, sillä ratkaisukäyrän hännän tulee poistua alueesta $\mathbb{R}^2$, ja ainoa mahdollisuus on että $t \to \infty$! Yhtälön (2.9) oikeasta puolesta nähdään että $\dot{N}(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$. Siten $N(t)$ on aidosti kasvava funktio. Koska $\Delta = [0, \infty[$, voidaan puhua raja-arvosta $\lim_{t\to\infty} N(t)$. Koska funktio on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, raja-arvo on olemassa, ja tälle pätee

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \sup\{N(t) \,|\, t \geq 0\} \leq K.$$

Tapaus II: $K < N(t) \leq N_0$ kaikilla $t \in \Delta$. Nytkin $\Delta = [0, \infty[$. Funktio on aidosti vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Siten raja-arvo on olemassa, ja sille pätee

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \inf\{N(t) \,|\, t \geq 0\} \geq K.$$

Lemma 2.1. *Olkoon $x(t)$ välillä $[t_0, \infty[$ määritelty derivoituva funktio. Oletetaan, että $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$ ja $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$ ovat olemassa. Tällöin*

$$\dot{x}_\infty = 0.$$

Huom. Lemman oletus, että on olemassa $\lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$, voidaan korvata oletuksella, että $x(t)$ on rajoitettu välillä $[t_0, \infty[$.

Lemman 2.1 todistus. Vastaoletus: $\dot{x}_\infty = 2a \neq 0$. Oletetaan vaikka $a < 0$. Silloin on olemassa sellainen t_1, että $|\dot{x}(t) - 2a| < |a|$ kaikilla $t \geq t_1$. Tällöin erityisesti $\dot{x}(t) < 2a + |a| = a < 0$ kaikilla $t \geq t_1$. Integraalin monotonisuutta käyttäen saadaan arvio

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau \leq \int_{t_1}^{t} a\, d\tau = a(t - t_1) \quad \forall t \geq t_1.$$

Siten

$$x(t) \leq x(t_1) + a(t - t_1) \to -\infty, \text{ kun } t \to \infty \ (a < 0),$$

mikä on ristiriidassa $x(t)$:n rajoittuneisuuden kanssa. □

Corollary 2.2. *Oletetaan että logistisessa yhtälössä pätee $K > 0$. Olkoon $N_0 > 0$ ja olkoon $N(t)$ vastaavan AAT:n ratkaisu. Tällöin*

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K.$$

Proof. Merkitään $a = \lim_{t\to\infty} N(t)$. Tällöin oikean puolen jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{t\to\infty} \dot{N}(t) = \lim_{t\to\infty} \left(rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) \right) = ra\Big(1 - \frac{a}{K}\Big) = h(a).$$

Lemman mukaan $h(a) = 0$, joten $a = 0$ tai K. Koska $a \geq \min\{N_0, K\}$, niin $a = K$. □

Kuva 1

Ratkaistaan yhtälö (2.9) myös konkreettisesti, Bernoullin yhtälönä. Koska $\lambda = 2$, sijoitetaan $z(t) = N(t)^{1-\lambda} = N(t)^{-1}$, joten $\dot{z} = -N^{-2}\dot{N}$, ja (2.9) saa muodon

$$
\begin{aligned}
&N^{-2}\dot{N} = rN^{-1} - \frac{r}{K} \Leftrightarrow \dot{z} + rz = \frac{r}{K} \text{ (int.tek. } \mu(t) = e^{rt}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\big(e^{rt}z\big) = \frac{r}{K}e^{rt} \\
&\Leftrightarrow e^{rt}z = \frac{r}{K}\int e^{rt}\,dt = \frac{1}{K}e^{rt} + C \Leftrightarrow z(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-rt}.
\end{aligned}
$$

Alkuehto:

$$\frac{1}{N_0} = z(0) = \frac{1}{K} + C \Leftrightarrow C = \frac{K - N_0}{N_0 K}.$$

Siten

$$N(t) = z(t)^{-1} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}, \quad t \geq 0.$$

Tästäkin näkee että $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0K/N_0 = K$.

2.3 Tartuntatautimallit

2.3.1 SIS-malli

Populaatio jaetaan kahteen osaan:

$S(t) =$ hetkellä t terveet, mutta taudille alttiit (susceptible) yksilöt.

$I(t) =$ hetkellä t sairaat (infective) yksilöt.

Oletetaan että parhaillaan sairastava yksilö (luokka I) voi tartuttaa terveen yksilön (luokka S), ja että sairas paranee aikanaan, jolloin hän siirtyy takaisin luokkaan S. Hän ei siis tule immuuniksi, vaan voi sairastua uudelleen. Infektoituvuusvoima F on alttiin yksilön aikayksikköä kohti annettu todennäköisyys (tn.) sairastua ($F\,dt$ on tn. sairastua ajassa dt). Oletetaan että se on suoraan verrannollinen infektoituneiden lukumäärään I, ts.

$$F(t) = \beta I(t),$$

jossa vakio $\beta > 0$ on tarttumisintensiteetti.

Oletetaan että sairauden kesto on $Exp(\alpha)$-jakautunut satunnaismuuttuja (sm.) vakionaan $\alpha > 0$. Tällöin sairas toipuu aikavälillä $[t, t + dt]$ tn:llä $\alpha\,dt$ (tietysti ehdolla, että on vielä sairas hetkellä t). Lisäksi oletetaan että populaatio ei muuten muutu: ei synnytä eikä kuolla. Näin olettaen saadaan differentiaaliyhtälösysteemi (DYS), jossa on kaksi tuntematonta funktiota S ja I sekä kaksi yhtälöä:

$$
\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) + \alpha I(t) \\
\dot{I}(t) &= +\beta S(t)I(t) - \alpha I(t).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Laskemalla puolittain yhteen saadaan

$$\frac{d}{dt}\big(S(t) + I(t)\big) = 0 \Leftrightarrow S(t) + I(t) = N \text{ (vakio) kaikilla } t \geq 0, \tag{2.11}$$

kuten pitääkin: populaation koko on vakio N. Siten $S(t) = N - I(t)$, ja sijoittamalla tämä alempaan yhtälöön (2.10) saadaan

$$\dot{I}(t) = \beta I(t)\Big(N - \frac{\alpha}{\beta} - I(t)\Big) = rI(t)\Big(1 - \frac{I(t)}{K}\Big), \tag{2.12}$$

jossa $K = N - \alpha/\beta$ ja $r = \beta(N - \alpha/\beta)$. Siis logistinen yhtälö (2.9). Määritellään parametri

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha}N. \tag{2.13}$$

Se voidaan tulkita yhden sairaan muuten terveessä populaatiossa kaikkiaan tartuttamien määrän odotusarvoksi.

Jos $K > 0$ (yhtäpitävästi $R_0 > 1$) ja $I(0) > 0$, korollaarin 2.2 mukaan

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = K = N - \frac{\alpha}{\beta} = N\Big(1 - \frac{1}{R_0}\Big).$$

Tällöin tauti on endeeminen. Jos taas $K < 0$ (yhtäpitävästi $R_0 < 1$) ja $I(0) > 0$, niin $r < 0$, joten $I(t)$ on vähenevä, nollalla alhaalta rajoitettu funktio. Siten, korollaaria mukaellen, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$: ei synny edes ohimenevää epidemiaa. Samoin käy myös rajatapauksessa $R_0 = 1$.

Määritellään vielä suhteelliset osuudet

$$i(t) = \frac{I(t)}{N} \quad \text{ja} \quad s(t) = \frac{S(t)}{N}.$$

Epidemian synnyn kannalta parametrin R_0 kynnysarvo on siis $R_0 = 1$. Asia voidaan esittää kuviona. Siinä $i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t)$ ja $i_\infty(R_0) = 1 - 1/R_0 = K/N$, kun $R_0 \geq 1$.

Kuva 2

2.3.2 SIR-malli

Muuten samat oletukset kuin SIS-mallissa, mutta sairas yksilö siirtyy luokasta I populaation kolmanteen luokkaan R (removed). Se voidaan tulkita monella tavalla: sairastanut saa tautiinsa immuniteetin, tai hän saattaa kuolla tautiin. Joka tapauksessa uudestaan ei sairasteta. Nyt malli saa DYS-muodon

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) &= +\beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \\ \dot{R}(t) &= +\alpha I(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Vastaavasti kuin SIS-mallissa saadaan

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \text{ (vakio) kaikilla } t \geq 0, \tag{2.15}$$

jossa N on populaation koko varauksella, että tautiin mahdollisesti kuolleetkin lasketaan mukaan. Riittää tarkastella kahden ylimmän yhtälön antamaa paria funktioille S ja I: kun ne tunnetaan, saadaan $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Kyseinen pari voidaan kirjoittaa suhteellisten osuuksien avulla muotoon

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\,\alpha R_0 s(t) i(t) \\ \frac{di}{dt} &= +\,\alpha R_0 s(t) i(t) - \alpha i(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pisteissä, joissa $\dot{s}(t) \neq 0 \Leftrightarrow s(t)i(t) \neq 0$, muuttuja t voidaan eliminoida pois: on olemassa lokaali käänteisfunktio $t(s)$. Parin (2.16) ratkaisu $((s(t), i(t))$ piirtää si-tasoon uran (trajectory). Tälle saadaan DY

$$\frac{di}{ds} = \frac{di}{dt} : \frac{ds}{dt} = -1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{s}, \tag{2.17}$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$i(s) = C - s + \frac{1}{R_0} \ln s, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Vakio C saadaan alkuehdoista:

$$C = s(0) + i(0) - \frac{1}{R_0} \ln s(0). \tag{2.19}$$

Jotta saadaan tartuntatautien kannalta järkeviä ratkaisuja, alkuehdoista oletetaan että $s(0) > 0$ ja $i(0) > 0$. Tällöin voidaan osoittaa, että (helpoiten tässä järjestyksessä):

(1) $i(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$ ($i(t)$:llä on riippumatta $s(t)$:stä triviaaliratkaisu $i(t) \equiv 0$).

(2) $s(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$ (nämä, (2.18) ja Poistumislause $\Rightarrow$ ratkaisuväli on $[0, \infty[$!).

(3) $\exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0$ ($s(t)$ vähenevä ja rajoitettu, lisäksi (2.18) ja kohta (1)).

(4) $\exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = i(s_\infty)$.

(5) $i_\infty = 0$ (pari (2.16), lemma 2.1).

Siten s_∞ saadaan yhtälöstä (sen kahdesta ratkaisusta pienempi)

$$0 = i(s_\infty) = C - s_\infty + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty. \tag{2.20}$$

Suure $r_\infty = 1 - s_\infty$ kertoo epidemian aikana sairastuneiden kokonaismäärän suhteellisena osuutena populaatiosta.

Monesti oletetaan myös, että $s(0) + i(0) = 1 \Leftrightarrow r(0) = R(0)/N = 0$. Enemmänkin, taudittomassa populaatiossa $s = 1$ ja $i = 0$. Nämä voidaan valita alkurvoiksi myös, kun epidemia alkaa muutamasta sairaasta yksilöstä: $i(0) \approx 0$ ja $s(0) \approx 1$ (matemaattisesti alkuehto $i(0) = 0$ johtaa ratkaisuun $i \equiv 0$). Tällöin $C \approx 1$, ja saadaan (miltei tarkasti) yhtälö

$$i(s) = 1 - s + \frac{1}{R_0} \ln s. \tag{2.21}$$

Seuraavassa kuvassa on piirretty ratkaisun ura faasiavaruudessa eri R_0:n arvoilla. Nuoli osoittaa tilan kehityssuunnan ajan t kasvaessa. Kun $R_0 > 1$ ja $s(0) \approx 1$, yhtälöstä (2.17) saadaan $i'(s(0)) < 0$, kun taas $R_0 < 1$ ja $s(0) \approx 1$, saadaan $i'(s(0)) > 0$. Koska $\dot{s}(0) < 0$, funktio $i(t)$ on aluksi kasva, kun $R_0 > 1$, ja aluksi vähenevä, kun $R_0 < 1$ (myös kun $R_0 = 1$, miksi?). Ensin mainitussa tapauksessa syntyy (ohimenevä) epidemia, jälkimmaisessä ei minkäänlaista, kun muutama sairas ilmaantuu terveeseen populaatioon. Siten myös SIR-mallissa parametrin R_0 kynnysarvo on $R_0 = 1$. Kyseinen asia näkyy parin (2.16) ratkaisujen dynamiikassa seuraavasti: Parilla on *tasapainotila* $i(t) \equiv 0$ ja $s(t) \equiv 1$ (tauditon populaatio). Jos $R_0 > 1$, se on *epästabiili*, jos taas $R_0 < 1$, se on *stabiili* (Kurssit DY II ja Autonomiset systeemit).

Kuva 3

2.4 Takaa-ajomallit

Rajoitutaan taso-ongelmaan, jossa takaa-ajaja ja -ajettava (saalis) liikkuvat xy-tasossa, ja edelleen ongelmatyyppiin, jossa saaliin liike $(a(t), b(t))$ ajan t funktiona tunnetaan, mutta takaa-ajajan liike, paikkavektori $(x(t), y(t))$, on selvitettävänä. Oletetaan että takaa-ajajan liikettä ohjaa periaate suuntautumisesta jatkuvasti kohti saatlista:

Kuva 4

Liikkeen suunnan ilmaisee nopeusvektori (derivaattavektori) $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Siten normaali(vektori) on $\mathbf{n}(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$; silloin $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$, jossa $\cdot$ on $\mathbb{R}^2$:n pistetulo. Saadaan funktioille $x(t)$ ja $y(t)$ ensimmäinen DY

$$\mathbf{n}(t) \cdot (a(t) - x(t), b(t) - y(t)) = 0 \Leftrightarrow (a(t) - x(t))\,\dot{y}(t) - (b(t) - y(t))\,\dot{x}(t) = 0. \quad (2.22)$$

Tarvitaan vielä toinen DY. Se puolestaan riippuu vahvasti tilanteen tekijöistä. Esimerkiksi, jos takaa-ajajan nopeus on vakio $\alpha > 0$, niin saadaan

$$|\mathbf{v}(t)| = \alpha \Leftrightarrow \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \alpha^2. \quad (2.23)$$

Pari (2.22-23) on vaikea ratkaista johtuen sen vahvasta epälineaarisuudesta.

Vielä mutkikkaammaksi tilanne muuttuu, jos takaa-ajajan nopeus α riippuu vaikkapa kulloisesta paikasta $(x(t), y(t))$. Esimerkiksi saalistava haukka muuttaa painovoimakentän potentiaalienergian $E_p(t) = mgy(t)$ (m = massa, g = painovoimavakio) nopeusenergiaksi $E_v(t) = (1/2)m\alpha(t)^2$. Ei oteta huomioon ilmanvastusta. Siten jos $y(0) = y_0$ ja $\alpha(0) = 0$, niin

$$\frac{1}{2}m\alpha(t)^2 = E_v(t) = E_p(0) - E_p(t) = mg(y_0 - y(t)),$$

josta saadaan $\alpha(t) = \sqrt{2g(y_0 - y(t))}$, ja (2.23) korvautuu yhtälöllä

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 2g(y_0 - y(t)). \tag{2.24}$$

Melko yleisen alun jälkeen siirrytään tilanteeseen, joka osataan ratkaista suljetussa muodossa. Ensinnäkin takaa-ajajan nopeus oletetaan vakioksi α. Pätee siis (2.23). Alkupaikkana olkoon origo: $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Koska nopeus on vakio, hetkellä t takaa-ajaja on kulkenut matkan αt. Tämä matka on kuljetun liikeradan pituus, joka on tunnetusti $\int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau$, joten (saadaan myös integroimalla $\int_0^t$ puolittain (2.23))

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau. \tag{2.25}$$

Oletetaan saaliin liike yksinkertaiseksi: vakionopeudella $\beta > 0$, $\beta < \alpha$, pitkin suoraa $x = a > 0$ ylöspäin. Alkupaikkana olkoon piste $(a, 0)$. Siten $(a(t), b(t)) = (a, \beta t)$, ja (2.22) saa muodon

$$(a - x)\, \dot{y} = (\beta t - y)\, \dot{x}, \tag{2.26}$$

josta pisteissä, joissa $\dot{x}(t) \neq 0$,

$$t = \frac{1}{\beta}\Big(y + (a - x)\, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big). \tag{2.27}$$

Eliminoidaan t-riippuvuus pois! Vaihdetaan muuttujaa (2.25):n integraalissa sijoittamalla $x(t)$:n käänteisfunktio $t = t(x)$ ($\dot{x}(t) \neq 0$). Silloin

$$dt = t'(x)\, dx, \quad t'(x) = 1/\dot{x}(t), \quad y(x) = y(t(x)), \quad y'(x) = \dot{y}(t(x))t'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t),$$
$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \sqrt{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2}\, dx = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx, \quad t = 0 \to x = x(0) = 0, \quad t \to x.$$

Yhtälöstä (2.25) saadaan

$$t = t(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \tag{2.28}$$

Yhtälöt (2.27) ja (2.28) antavat yhtälön, joka koskee vain muuttujia x ja y:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \frac{1}{\beta}\big(y + (a - x)\, y'(x)\big).$$

Derivoimalla saadaan

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + y'(x)^2} = \frac{1}{\beta}\big(y'(x) - y'(x) + (a - x)\, y''(x)\big) = \frac{1}{\beta}(a - x)\, y''(x),$$

siis DY liikkeen radalle xy-faasiavaruudessa. Sijoitetaan $z(x) = y'(x)$, jolloin saadaan 1. kl. separoituva yhtälö

$$\frac{1}{\beta}(a-x)\,z'(x) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1+z(x)^2}, \tag{2.29}$$

josta (ei triviaaliratkaisuja)

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\beta\,dx}{\alpha(a-x)} &\Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{(a-x)}\,dx \Leftrightarrow \\
\ln(z+\sqrt{1+z^2}) &= -\frac{\beta}{\alpha}\ln|a-x| + C_1 = \ln\big(C_2|a-x|^{-\beta/\alpha}\big) \Leftrightarrow \\
z+\sqrt{1+z^2} &= C_2|a-x|^{-\beta/\alpha} = C_2(a-x)^{-\beta/\alpha},
\end{aligned}$$

sillä $x(0) < a$ ja yhtäsuuruutta ei saavuteta.

Koska $x(0) = y(0) = 0$, (2.26):sta saadaan $a\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow z(0) = y'(0) = \dot{y}(0)/\dot{x}(0) = 0$. Siten $1 = C_2 a^{-\beta/\alpha} \Leftrightarrow C_2 = a^{\beta/\alpha}$ ja

$$z+\sqrt{1+z^2} = a^{\beta/\alpha}(a-x)^{-\beta/\alpha} = \big(1-x/a\big)^{-\beta/\alpha} =: \lambda.$$

Ratkaistaan tästä z. Saadaan $z = (1/2)\big(\lambda - \lambda^{-1}\big)$. Siten

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int z(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\big(1-x/a\big)^{-\beta/\alpha} - \big(1-x/a\big)^{\beta/\alpha}\Big)\,dx \\
&= \frac{a}{2}\left(\frac{\big(1-x/a\big)^{1+\beta/\alpha}}{1+\beta/\alpha} - \frac{\big(1-x/a\big)^{1-\beta/\alpha}}{1-\beta/\alpha}\right) + C,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ja alkuehto $x(0) = y(0) = 0$ antaa

$$C = \frac{a\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}. \tag{2.31}$$

Takaa-ajaja saa saaliin kiinni ($\alpha > \beta$), kun $x = a$, jolloin $y = C$, siis pisteessä $\big(a, a\alpha\beta/(\alpha^2-\beta^2)\big)$. Sijoittamalla saadut $z(x) = y'(x) = \dot{y}/\dot{x}$ ja $y(x)$ yhtälöön (2.27) saadaan funktio $t(x)$, ja siitä esimerkiksi takaa-ajoon käytetty aika $t(a)$. Alkuperäisen systeemin (2.26) ja (2.23) ratkaisuväli nollasta eteenpäin on $[0, t(a)[$.

3 Lineaariset toisen kertaluvun yhtälöt

3.1 Lineaarinen differentiaalioperaattori

Toisen kertaluvun DY:n yleinen muoto on

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) = 0, \tag{3.1}$$

jossa funktio (lauseke) F on määritelty jossain $\mathbb{R}^4$:n avoimessa osajoukossa. Toisen kertaluvun yhtälö ratkeaa suljetussa muodossa vain poikkeustapauksissa. Erikoistapauksista tärkein lienee *lineaarinen 2. kl. DY*, jonka standardimuoto (LY) on

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \tag{3.2}$$

jossa kerroinfunktiot p, q ja r ovat annettuja, ja ne oletetaan jatkuviksi jollain välillä $I \subset \mathbb{R}$. Jos p ja q ovat vakioita, yhtälöä (3.2) kutsutaan vakiokertoimiseksi. Yhtälöä (3.2) vastaava homogeeniyhtälö (HY) on

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{3.3}$$

Mitä lineaarisessa yhtälössä tehdään tuntemattomalle funktiolle $y(x)$, määrittelee lineaarisen differentiaalioperaattorin

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y, \tag{3.4}$$

ja syyn nimitykseen paljastaa seuraava lause.

Theorem 3.1. *Olkoot $y_1, y_2 \in C^2(I)$ funktioita ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ vakioita. Tällöin operaattorille* (3.4) *pätee*

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2. \tag{3.5}$$

Proof. Todistuu kuten yhtälöt (1.28) 1.kl. tapauksessa. □

Corollary 3.2 (Superpositioperiaate)**.** *Jos funktiot y_1 ja y_2 ovat HY:n (3.3) ratkaisuja ja c_1 sekä c_2 vakioita, niin myös funktio $y = c_1y_1 + c_2y_2$ on sen ratkaisu.*

Proof. Koska $Ly_1 = Ly_2 \equiv 0$, niin

$$Ly = L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2 = c_1 * 0 + c_2 * 0 \equiv 0.$$

□

Theorem 3.3 (Lineaarisen 2.kl. DY:n OY-lause)**.** *Olkoon I väli $\mathbb{R}$:ssä. Oletetaan että kerroinfunktiot p, q ja r ovat jatkuvia välillä I ja $x_0 \in I$. Olkoot y_0 ja y_1 mielivaltaisia reaalilukuja. Tällöin AAT:llä*

$$Ly = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \tag{3.6}$$

on koko välillä I ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Kaikki muut I:n osaväleillä annetut AAT:n (3.6) ratkaisut ovat tämän rajoittumia.

Proof. Luvut 4 ja 5 (kurssi Differentiaaliyhtälöt II). □

Huom.1. Lause on luonteeltaan globaali: ratkaisu on olemassa koko välillä I. Tämä on vahvasti seurausta lineaarisuudesta.

Huom.2. Ehtoja on kaksi. Toisen kl. yhtälön yleinen ratkaisu sisältää kaksi parametria, ja niiden kiinnittämiseen tarvitaan kaksi riippumatonta ehtoa. Voidaan asettaa muitakin kuin lauseessa esitetyt *alkuehdot* (tai yksikössä alkuehto).

3.2 Perusjärjestelmä

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan lineaarista 2.kl. yhtälöä $y''-y = 0$. Se on homogeeninen. Selvästi funktiot $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = e^{-x}$ ovat sen ratkaisuja (välillä $\mathbb{R}$). Superpositioperiaatteen mukaan kaikki muotoa $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $(*)$, olevat funktiot ovat sen ratkaisuja.

Toisaalta olkoon $z(x)$ yhtälömme ratkaisu ja olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ kiinnitetty. Merkitään $z(x_0) = z_0$ ja $z'(x_0) = z_1$. Etsitään sellaiset kertoimet $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, että niillä varustettu funktio $y(x)$ muodosta $(*)$ toteuttaa saman alkuehdon, ts. $y(x_0) = z_0$ ja $y'(x_0) = z_1$. Koska $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, niin saadaan lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 e^{x_0} + c_2 e^{-x_0} = z_0 \\ y'(x_0) &= c_1 e^{x_0} - c_2 e^{-x_0} = z_1, \end{aligned}$$

jolla on yksikäsitteinen ratkaisu, sillä

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = -e^{x_0}e^{-x_0} - e^{x_0}e^{-x_0} = -2 \neq 0.$$

Tämä ratkaisu on muuten $c_1 = (z_0 + z_1)e^{-x_0}/2$, $c_2 = (z_0 - z_1)e^{x_0}/2$.

Koska näin saatu ratkaisu y ja ratkaisu z toteuttavat saman alkuehdon, OY-lauseen 3.3 mukaan $y \equiv z$. Siten homogeeniyhtälömme kaikki ratkaisut saadaan muodosta $(*)$. Tämä on kaksiparametrinen ratkaisujen joukko (yleinen ratkaisu), ja funktiopari (y_1, y_2) virittää sen.

Definition 3.4. Funktiopari (y_1, y_2) on homogeeniyhtälön (3.3), $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, *perusjärjestelmä* (pj.; a fundamental solution set in English) välillä I, jos

(1) funktiot y_1 ja y_2 ovat kyseisen yhtälön ratkaisuja välillä I,

(2) kyseisen yhtälön kaikki ratkaisut välillä I saadaan muodosta

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

joka on siten kaikkien ratkaisujen joukko (yleinen ratkaisu välillä I).

Edellisen esimerkin pari $(y_1, y_2) = \big(e^x, e^{-x}\big)$ on esimerkin HY:n eräs perusjärjestelmä.

Theorem 3.5. *Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ ja $p, q \in C(I)$. Tällöin HY:llä (3.3), $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, on perusjärjestelmä välillä I.*

Proof. Kiinnitetään $x_0 \in I$. OY-lauseen 3.3 mukaan HY:llä on sellaiset ratkaisut $y_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, että

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1. \end{aligned}$$

Pari (y_1, y_2) toteuttaa luonnollisesti määritelmän 3.4 ehdon (1). Osoitetaan että myös ehto (2) toteutuu, jolloin pari on perusjärjestelmä. Niinpä, olkoon $z : I \to \mathbb{R}$ HY:n mielivaltainen ratkaisu. Tarkastellaan funktiota

$$y(x) = z(x_0)y_1(x) + z'(x_0)y_2(x).$$

Se on HY:n ratkaisu välillä I, ja pätee

$$\begin{aligned} y(x_0) &= z(x_0)y_1(x_0) + z'(x_0)y_2(x_0) = z(x_0) * 1 + z'(x_0) * 0 = z(x_0) \\ \text{ja } y'(x_0) &= z(x_0)y_1'(x_0) + z'(x_0)y_2'(x_0) = z(x_0) * 0 + z'(x_0) * 1 = z'(x_0). \end{aligned}$$

OY-lauseen 3.3 yksikäsitteisyyspuolen mukaan $y \equiv z$, joten (2) toteutuu. □

Huom. Noin yleisesti ottaen lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriassa vaikein tehtävä on juuri homogeeniyhtälön perusjärjestelmän löytäminen.

Otetaan todistamatta käyttöön muutama apuneuvo lineaarialgebrasta. Tarkastellaan 2×2-neliömatriiseja ja $\mathbb{R}^2$:n pisteitä (vektoreita)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2.$$

Kertolasku matriisi kertaa vektori määritellään yhtälöllä

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Matriisi määrittelee kuvauksen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Se on lineaarikuvaus, sillä jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, niin suoralla laskulla saadaan $A(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1 A\mathbf{x} + c_2 A\mathbf{y}$. Matriisin A *determinantti* on

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.6. *Neliömatriisille $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä*

(1) Jokaista $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ kohti lineaarisella yhtälöparilla $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2, \end{aligned}$$

on tasan yksi ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(2) Lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, on injektio.

(3) Lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, on surjektio.

(4) Matriisi A on säännöllinen, ts. sillä on käänteismatriisi $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle pätee ($I$ on tässä identtinen matriisi)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

(5) $\det A \neq 0$.

Huom. Vastaava tulos pätee kaikille neliömatriiseille $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definition 3.7. Funktioiden $y_1, y_2 \in C^1(I)$ *Wronskin determinantti* on funktio $W(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}$,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in I. \tag{3.7}$$

Theorem 3.8. *Olkoot $p, q \in C(I)$, ja olkoot $y_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, homogeeniyhtälön (3.3), $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, kaksi ratkaisua. Tällöin pari (y_1, y_2) on kyseisen yhtälön perusjärjestelmä välillä I tasan silloin, kun $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.*

Proof. Oletetaan ensin, että (y_1, y_2) on perusjärjestelmä. Olkoot $x_0 \in I$ ja $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia. OY-lauseen 3.3 mukaan HY:llä on sellainen ratkaisu $z : I \to \mathbb{R}$, että $z(x_0) = z_0$ ja $z'(x_0) = z_1$. Koska (y_1, y_2) on perusjärjestelmä, joillakin $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ pätee $z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, ja saadaan

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(x_0) \\ z'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Siten lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on surjektio. Lemman 3.6 mukaan pätee $W(y_1, y_2)(x_0) = \det A \neq 0$.

Oletetaan sitten, että $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$. Pari (y_1, y_2) luonnollisesti toteuttaa määritelmän 3.4 ehdon (1). Osoitetaan että se toteuttaa myös toisen ehdon. Olkoon $z : I \to \mathbb{R}$ HY:n ratkaisu. Lemman 3.6 mukaan yhtälöparilla

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 \\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(x_0) \\ z'(x_0) \end{bmatrix}$$

on ratkaisu $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$, sillä sen determinantti on $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Funktiolle $y(x) = \tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x)$ pätee $y(x_0) = z(x_0)$ ja $y'(x_0) = z'(x_0)$. OY-lauseen 3.3 mukaan $y \equiv z$. □

Samalla tuli todistetuksi seuraava lause.

Corollary 3.9. *Samat oletukset kuin edellisessä lauseessa. Tällöin pätee joko*

$$\begin{aligned} & W(y_1, y_2)(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in I \quad (\text{tällöin } (y_1, y_2) \text{ on pj.}) \\ \text{tai} \quad & W(y_1, y_2)(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I \quad (\text{tällöin } (y_1, y_2) \text{ ei ole pj.}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan lineaarista 2.kl. yhtälöä $y'' + 9y = 0$. Se on HY. Suoraan laskemalla nähdään funktiot $y_1(x) = \cos 3x$ ja $y_2(x) = \sin 3x$ sen ratkaisuiksi (koko $\mathbb{R}$:ssä). Esimerkiksi $y_1' = -3 \sin 3x$, $y_1'' = -9 \cos 3x$, joten

$$y_1'' + 9y_1 = -9 \cos 3x + 9 \cos 3x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Koska $y_2' = 3 \cos 3x$, niin

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

ja lauseen 3.8 mukaan funktiopari (y_1, y_2) on kyseisen yhtälön pj. Ja todellakin seurauksen 3.9 mukaisesti

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3 \sin 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3\big(\cos^2(3x) + \sin^2(3x)\big) = 3 \neq 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

3.3 Vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt

Vakiokertoiminen 2.kl. homogeeniyhtälö on muotoa

$$L(y) = y'' + ay' + by = 0, \tag{3.9}$$

jossa a ja $b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Kokeillaan ratkaisuksi yritettä $y(x) = e^{rx}$, jossa r on vakio. Tällöin $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ ja

$$L\big(e^{rx}\big) = e^{rx}\big(r^2 + ar + b\big) = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0.$$

On saatu seuraava tulos:

Theorem 3.10. *Funktio e^{rx}, jossa r on vakio, on vakiokertoimisen HY:n (3.9) ratkaisu tasan silloin, kun r on karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuri.*

Huom. Itse asiassa r saa olla myös kompleksiluku. Juurten laatu antaa kolme tapausta.

Tapaus I: Karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalijuurta.

Esimerkki 3.3. Homogeeniyhtälö $y'' + 5y' - 6y = 0$ on vakiokertoiminen. Karakteristisesta yhtälöstä saadaan

$$r^2 + 5r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24 = 49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -6.$$

Lauseen 3.10 mukaan yhtälöllämme on ratkaisut $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-6x}$. Lasketaan niiden Wronski:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Lauseen 3.8 nojalla pari $(y_1, y_2) = \big(e^x, e^{-6x}\big)$ on yhtälömme pj. Voidaan koota lause:

Theorem 3.11. *Jos karakteristisella yhtälöllä $r^2 + ar + b = 0$ on kaksi erisuurta reaalijuurta r_1, r_2, niin vakiokertoimisella HY:llä (3.9) on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = \big(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\big)$.*

Proof. Esimerkkiin verrattuna vain Wronski vähän muuttuu. Se on nyt

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 - r_2 \neq 0.$$

□

Tapaus II: Karakteristisella yhtälöllä $r^2 + ar + b = 0$ yksi kaksinkertainen reaalijuuri. Olkoon r_0 tällainen. Silloin

$$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0 r + r_0^2 \Rightarrow a = -2r_0 \text{ ja } b = r_0^2.$$

HY:llä (3.9) on ratkaisu $y_1 = e^{r_0 x}$. Myös $y_2 = xe^{r_0 x}$ on sen ratkaisu, minkä osoittaa seuraava lasku: $y_2' = e^{r_0 x} + r_0 x e^{r_0 x}$, $y_2'' = 2r_0 e^{r_0 x} + r_0^2 x e^{r_0 x}$, ja koska r_0 on juuri ja $2r_0 + a = 0$,

$$\begin{aligned} L(y_2) &= 2r_0 e^{r_0 x} + r_0^2 x e^{r_0 x} + a e^{r_0 x} + a r_0 x e^{r_0 x} + b x e^{r_0 x} \\ &= (r_0^2 + a r_0 + b) x e^{r_0 x} + (2r_0 + a) e^{r_0 x} = 0 * x e^{r_0 x} + 0 * e^{r_0 x} = 0. \end{aligned}$$

Lasketaan funktioiden y_1 ja y_2 Wronski. Saadaan, koska $y_1' = r_0 e^{r_0 x}$,

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r_0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On saatu seuraava tulos:

Theorem 3.12. *Jos r_0 on karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ kaksinkertainen juuri, niin vakiokertoimisella HY:llä (3.9) on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = \big(e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}\big)$.*

Esimerkki 3.4. Yhtälö $y'' + 6y' + 9y = 0$ antaa karakteristinen yhtälön $r^2 + 6r + 9 = 0$, ja tällä on kaksoisjuuri $r_0 = -3$. Pj. on siis $\big(e^{-3x}, xe^{-3x}\big)$.

Tapaus III: Karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuret ovat (aitoja) kompleksilukuja. Kertoimet a ja b ovat kuitenkin reaaliset.Tällöin, jos $r_1 = s + it$ jossa $t \neq 0$ ja i on imaginaariyksikkö, on karakteristisen yhtälön juuri, niin on myös sen kompleksikonjugaatti $r_2 = \bar{r}_1 = s - it$, sillä

$$r_1^2 + ar_1 + b = 0 \Rightarrow \bar{r}_1^2 + a\bar{r}_1 + b = \overline{r_1^2 + ar_1 + b} = \bar{0} = 0.$$

Tarkastellaan kompleksiarvoisia funktioita $e^{r_1 x}$ ja $e^{r_2 x}$, joissa r_1 ja r_2 ovat siis liittojuuria. Lause 3.10 pätee myös niille: funktiot ovat vakiokertoimisen HY:n (3.9) ratkaisuja, vaikkakin kompleksiarvoisia. Sovelletaan Moivren kaavaa

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{sx+itx} = e^{sx}\big(\cos(tx) + i\sin(tx)\big), \\ e^{r_2 x} &= e^{sx-itx} = e^{sx}\big(\cos(tx) - i\sin(tx)\big). \end{aligned}$$

Superpositioperiaatteen mukaan myös reaalifunktiot

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}\big(e^{r_1 x} + e^{r_2 x}\big) = e^{sx}\cos(tx) \quad \text{ja} \\ y_2(x) &= \frac{1}{2i}\big(e^{r_1 x} - e^{r_2 x}\big) = e^{sx}\sin(tx) \end{aligned}$$

ovat HY:n (3.9) ratkaisuja, mikä voitaisiin todeta myös suoralla laskulla. Lasketaan vielä Wronski: $y_1' = se^{sx}\cos(tx) - te^{sx}\sin(tx)$, $y_2' = se^{sx}\sin(tx) + te^{sx}\cos(tx)$ ja

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s & t \end{vmatrix} = t \neq 0.$$

On saatu tulos:

Theorem 3.13. *Jos $r_1 = s + it \in \mathbb{C}$ ja $r_2 = s - it \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, ovat karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, juuret, niin vakiokertoimisella HY:llä (3.9) on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = \big(e^{sx}\cos(tx), e^{sx}\sin(tx)\big)$.*

Esimerkki 3.5. Yhtälöstä $y'' + 2y' + 4y = 0$ saadaan karakteristinen yhtälö

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Siten $r_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ja $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$, joten $s = -1$ ja $t = \sqrt{3}$. Lauseen 3.13 nojalla yhtälöllämme on pj.

$$(y_1, y_2) = \big(e^{-x}\cos(x\sqrt{3}),\ e^{-x}\sin(x\sqrt{3})\big).$$

3.4 Kertaluvun pudotus

Palataan takaisin aivan yleiseen 2.kl. homogeeniyhtälöön (3.3),

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Oletetaan että tunnetaan jokin sen koko tarkasteluvälillä nollasta poikkeava ratkaisu y_1. Siis $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. Tällöin toinen, riippumaton ratkaisu saadaan yritteellä $y(x) = u(x)y_1(x)$, jossa funktio u oletetaan kahdesti derivoituvaksi. Menettely kuuluu luokkaan *vakion varioiminen.* Lasketaan: $y(x) = uy_1$, $y' = u'y_1 + uy_1'$, $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$, ja koska y_1 toteuttaa yhtälön (3.3), niin

$$\begin{aligned} L(y) &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)u'y_1 + p(x)uy_1' + q(x)uy_1 = u\big(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\big) \\ &+ y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = y_1v' + (2y_1' + py_1)v = 0, \end{aligned}$$

missä on merkitty $v(x) = u'(x)$. On saatu lineaarinen 1.kl. DY; siitä nimitys kertaluvun pudotus.

Ratkaistaan kyseinen yhtälö. Koska $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$, saadaan koko I:ssä yhtäpitävä standardimuotoinen yhtälö

$$v' + \frac{2y_1' + py_1}{y_1}v = 0,$$

jonka integroiva tekijä on

$$\mu(x) = \exp\Big(2\int \frac{y_1'}{y_1}\,dx + \int p\,dx\Big) = \exp\Big(\ln y_1^2 + \int p\,dx\Big) = y_1^2 \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big).$$

Siten ratkaistavana oleva yhtälö saa yhtäpitävän muodon

$$\frac{d}{dx}\Big(vy_1^2 \exp\Big(\int p\,dx\Big)\Big) = 0 \Leftrightarrow vy_1^2 \exp\Big(\int p\,dx\Big) = C \Leftrightarrow v(x) = Cy_1^{-2} \exp\Big(-\int p\,dx\Big).$$

Tavoitteeseen riittää valita $C = 1$, jolloin saadaan

$$v(x) = y_1^{-2} \exp\Big(-\int p\,dx\Big), \quad u(x) = \int v(x)\,dx = \int y_1(x)^{-2} \exp\Big(-\int^x p(t)\,dt\Big)\,dx.$$

On löydetty välille I HY:n (3.3) toinen ratkaisu

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = y_1(x) \int y_1(x)^{-2} \exp\Big(-\int^x p(t)\,dt\Big)\,dx.$$

Osoitetaan vielä laskemalla Wronski, että y_1 ja y_2 ovat rippumattomia ratkaisuja. Koska

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)(x)}{y_1(x)^2},$$

niin

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2)(x) &= y_1^2\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{y_2}{y_1}\Big) = y_1^2\,\frac{d}{dx}\bigg(\int y_1(x)^{-2}\exp\Big(-\int^x p(t)\,dt\Big)\,dx\bigg) \\ &= y_1^2 y_1^{-2}\exp\Big(-\int^x p(t)\,dt\Big) = \exp\Big(-\int^x p(t)\,dt\Big) \neq 0 \quad \text{kaikilla } x\in I. \end{aligned}$$

Siten pari (y_1, y_2) on HY:n (3.3) perusjärjestelmä välillä I. Kootaan lauseeksi:

Theorem 3.14 (Kertaluvun pudotus). *Jos tunnetaan homogeeniyhtälön (3.3), $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, ratkaisu y_1, jolla $y_1(x)\neq 0$ kaikilla $x\in I$, niin toinen, riippumaton ratkaisu y_2 löydetään välille I yritteellä $y(x)=u(x)y_1(x)$, jossa haettava funktio u on kahdesti derivoituva. Nämä y_1 ja y_2 muodostavat yhtälön (3.3) perusjärjestelmän välillä I.*

Esimerkki 3.6. Homogeeniyhtälöllä $L(y)=4x^2y''+4xy'-y=0$ on välillä $I=]0,\infty[$ ratkaisu $y_1(x)=x^{1/2}$. Tämä on nollasta poikkeava välillä I. Etsitään toinen ratkaisu kertaluvun pudotuksella. Yrite on $y(x)=u(x)y_1(x)=x^{1/2}u$, jolloin $y'=(1/2)x^{-1/2}u+x^{1/2}u'$, $y''=-(1/4)x^{-3/2}u+x^{-1/2}u'+x^{1/2}u''$ ja

$$\begin{aligned} L(y) &= -x^{1/2}u+4x^{3/2}u'+4x^{5/2}u''+2x^{1/2}u+4x^{3/2}u'-x^{1/2}u = 4x^{5/2}u''+8x^{3/2}u' \\ (\text{sij. } v=u') \ &= 4x^{3/2}(xv'+2v)=0 \Leftrightarrow v'+\frac{2}{x}v=0. \end{aligned}$$

Viimeisen yhtälön integroiva tekijä on

$$\mu(x)=\exp\Big(2\int\frac{dx}{x}\Big)=\exp\big(\ln|x|^2\big)=x^2.$$

Siten saadaan

$$\frac{d}{dx}(x^2v)=0\Leftrightarrow x^2v=C\Leftrightarrow v(x)=\frac{C}{x^2}\Leftrightarrow u(x)=C\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{C}{x}+D.$$

Valitaan $C=-1$ ja $D=0$, jolloin $u(x)=1/x$, ja toinen HY:n ratkaisu on $y_2(x)=u(x)y_1(x)=(1/x)x^{1/2}=x^{-1/2}$. Jo lause 3.14 takaa, että funktiopari $(y_1,y_2)=\big(x^{1/2},x^{-1/2}\big)$ on yhtälömme pj. välillä $]0,\infty[$.

3.5 Epähomogeeni yhtälö, vakion variointi

Tarkastellaan lopuksi täyttä epähomogeenista 2.kl. lineaariyhtälöä (3.2),

$$L(y)=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r(x),$$

(tässä yhteydessä lyhenne EHY) ja sitä vastaavaa homogeeniyhtälöä (HY) (3.3),

$$L(y)=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0.$$

Seuraava lause sisältää lineaarisen DY:n (3.2) ratkaisumenetelmän.

Theorem 3.15. *Olkoon funktiopari (y_1,y_2) HY:n (3.3), $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, perusjärjestelmä, ja olkoon y_p EHY:n (3.2), $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$, yksittäisratkaisu. Tällöin kyseisen EHY:n yleinen ratkaisu on*

$$y(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Enemmänkin, tämä muoto antaa kaikki EHY:n ratkaisut.

Proof. Aivan kuten lause 1.11. □

Lisäksi, jos HY:n (3.3) perusjärjestelmä (y_1, y_2) tunnetaan, EHY:n (3.2) yksittäisratkaisu löytyy nk. *vakioiden varioinnilla*:

Olkoon (y_1, y_2) HY:n perusjärjestelmä. Lähdetään liikkeelle yritteestä

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \tag{3.11}$$

jossa funktiot c_1 ja c_2 oletetaan ainakin kertaalleen derivoituviksi. Tällöin

$$y'(x) = (c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1y_1' + c_2y_2').$$

Vaikeuksien välttämiseksi halutaan että funktioiden c_1 ja c_2 derivaattojen kertaluvut pysyvät mahdollisimman matalina. Siksi asetetaan funktioille c_1 ja c_2 ensimmäinen yhtälömuotoinen ehto

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{3.12}$$

Sen vallitessa pätee $y' = c_1y_1' + c_2y_2'$, $y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''$, ja koska y_1 ja y_2 ovat HY.n ratkaisuja, niin

$$L(y) = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1\big(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\big) + c_2\big(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\big) = c_1'y_1' + c_2'y_2'.$$

Siten $L(y) = r(x)$ pätee, jos seuraava yhtälöpari toteutuu:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= r(x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pidetään hetki vapaa muuttuja x kiinnitettynä ja sitä vastaavia lukuja $c_1'(x)$ ja $c_2'(x)$ muuttujina niille lineaarisessa yhtälöparissa (3.13). Tällä on lemman 3.6 nojalla yksikäsitteisesti määrätty ratkaisu, sillä lineaariparin determinantti (kaikilla x) on (käytetään myös seurausta 3.9)

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x) \neq 0.$$

Kyseinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -r(x)\, y_2(x)\Big(W(y_1, y_2)(x)\Big)^{-1} \\ c_2'(x) &= r(x)\, y_1(x)\Big(W(y_1, y_2)(x)\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Siten integroimalla saadaan derivoituvat funktiot

$$c_1(x) = -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \quad \text{ja} \quad c_2(x) = \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx, \tag{3.14}$$

ja sitä myötä EHY:n (3.2) yksittäisratkaisu (3.11).

Huom.1. Kuten aikaisemmin on mainittu, lineaarisen yhtälön ratkaisemisen teoriassa vaikeimmaksi tehtäväksi kaiken kaikkiaan jää homogeeniyhtälön perusjärjestelmän löytäminen. Tälle ei olekaan mitään yleistä menetelmää, kun kertaluku on ≥ 2, todistettavasti!

Huom.2. Hämäävän tiiviistä esityksestään huolimatta (3.14) voi olla erittäin työläs laskea.

Esimerkki 3.7. Ratkaistaan EHY $y'' + y = \tan x$ (jossa $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Ensin vastaava HY $y'' + y = 0$, joka on vakiokertoiminen. Karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i,$$

joten $s = 0$ ja $t = 1$, ja lauseen 3.13 mukaan HY.llä on pj. $(y_1, y_2) = (\cos x, \sin x)$. Saadaan $y_1' = -\sin x$ ja $y_2' = \cos x$.

Etsitään EHY:n yksittäisratkaisu y_p vakioiden varioinnilla: yrite on $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, ja yhtälöpari (3.13) saa asun

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= \cos x\, c_1' + \sin x\, c_2' = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= -\sin x\, c_1' + \cos x\, c_2' = \tan x. \end{aligned}$$

Kerrotaan ylempi $\sin x$:llä, alempi $\cos x$:llä ja lasketaan puolittain yhteen. Saadaan

$$c_2' = (\sin^2 x + \cos^2 x)c_2' = \tan x \cos x = \sin x.$$

Kertomalla $\cos x$:llä ja $\sin x$:llä ja vähentämällä saadaan

$$c_1' = (\sin^2 x + \cos^2 x)c_1' = -\tan x \sin x = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

Siten (hiukka vaikeampi integrointi)

$$c_1(x) = \int \cos x\, dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x - \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|$$

ja

$$c_2(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x.$$

Ei siis tarvitse välittää integroimisvakioista! On saatu EHY:n yksittäisratkaisu

$$y_p(x) = \cos x \sin x - \cos x \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| - \cos x \sin x = -\cos x \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|.$$

Lauseen 3.15 mukaan EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = -\cos x \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

EHY:n yksittäisratkaisu saadaan usein helpommin sopivalla *parametreista riippuvalla yritteellä*, varsinkin jos yhtälö on vakiokertoiminen. Valotetaan asiaa esimerkeillä.

Esimerkki 3.8.
$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$$

Siis $r(x) = 3x + 1$, ja sopiva yrite on polynomi $y(x) = Ax + B$, jossa A ja $B \in \mathbb{R}$ ovat parametreja. Silloin $y' = A$, $y'' = 0$ ja

$$\begin{aligned}&L(y) = 0 + 3A + 2Ax + 2B = 3x + 1 \quad \text{kaikilla } x \ \Leftrightarrow \\ &2A = 3,\ 3A + 2B = 1 \Leftrightarrow A = 3/2,\ B = -7/4.\end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = (3/2)x - 7/4$ on EHY:n yksittäisratkaisu.

HY: $L(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$, josta karakteristinen yhtälö $r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -2$. Siten HY:n pj. on $(y_1, y_2) = (e^{-x}, e^{-2x})$, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = (3/2)x - 7/4 + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 3.9.
$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$$

Siis $r(x) = e^{3x}$, ja sopiva yrite on $y(x) = Ae^{3x}$. Silloin $y' = 3Ae^{3x}$, $y'' = 9Ae^{3x}$ ja

$$\begin{aligned}&L(y) = 9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \quad \text{kaikilla } x \ \Leftrightarrow \\ &20A = 1 \Leftrightarrow A = 1/20.\end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = (1/20)e^{3x}$ on EHY:n yksittäisratkaisu, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = (1/20)e^{3x} + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 3.10.
$$L(y) = y'' - y' - y = \sin x$$

Siis $r(x) = \sin x$, ja sopiva yrite on $y(x) = A\sin x + B\cos x$, jossa A ja $B \in \mathbb{R}$ ovat parametreja. Silloin $y' = A\cos x - B\sin x$, $y'' = -A\sin x - B\cos x$ ja

$$\begin{aligned}&L(y) = -A\sin x - B\cos x - A\cos x + B\sin x - A\sin x - B\cos x = (-2A + B)\sin x \\ &+ (-A - 2B)\cos x = \sin x \Leftrightarrow -2A + B = 1,\ -A - 2B = 0 = 1 \Leftrightarrow A = -2/5,\ B = 1/5.\end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = -(2/5)\sin x + (1/5)\cos x$ on EHY:n yksittäisratkaisu.

HY: $L(y) = y'' - y' - y = 0$, josta karakteristinen yhtälö $r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = (1 + \sqrt{5})/2,\ r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Siten HY:n pj. on $(y_1, y_2) = (\exp((1+\sqrt{5})x/2), \exp((1-\sqrt{5})x/2))$, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = -(2/5)\sin x + (1/5)\cos x + c_1\exp((1+\sqrt{5})x/2) + c_2\exp((1-\sqrt{5})x/2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 3.11.
$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 + e^{3x}$$

Siis $r(x) = 3x+1+e^{3x}$, ja sopiva yrite on $y(x) = Ax+B+Ce^{3x}$. Itse asiassa lineaarisuuden ja esimerkkien (3.8-9) nojalla saadaan välittömästi $y_p(x) = (3/2)x - 7/4 + (1/20)e^{3x}$.

3.6 Planeetan liike auringon ympäri

Ratkaistaan luvun lopuksi klassinen taivaanmekaniikan *kahden kappaleen ongelma*, planeetan liike auringon ympäri. Lähteenä on Ritzer and Rose: Differential Equations with Applications, McGraw-Hill, 1968, jonka tekstiin on tehty vähäisiä lisäyksiä.

Planeetan liike mallinnetaan tasoliikkeenä radan tasossa, jolloin sen määrää tyhjentävästi paikkavektori $(x(t), y(t))$ ajan t funktiona. Napakoordinaateissa saadaan seuraavat esitykset:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}(t) &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{y}(t) &= \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta. \end{aligned}$$

Newtonin toisen lain mukaan

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{3.16}$$

jossa $\mathbf{F}$ on ulkoinen voima(vektori), m on massa ja $\mathbf{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ on kiihtyvyys(vektori). Sijoitetaan aurinko origoon, jolloin vetovoima vetää planeettaa jatkuvasti origoa kohti.

Välihuomautus: Jos liikettä käsiteltäisiin xyz-avaruudessa $\mathbb{R}^3$, Newtonin vetovoimalaista (siitä tuonnempana) ja laista (3.16) saataisiin suoraviivaisesti 2.kl. (epälineaarinen) DYS

$$\ddot{x} = -\frac{Kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{Ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \ddot{z} = -\frac{Kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

jossa K on vakio. Systeemien OY-lause on voimassa $\mathbb{R}^7$: n, $(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbb{R}^7$, alueessa $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \times \mathbb{R}^3$. Tässä alueessa pysyvä systeemin ratkaisu on yksikäsitteisesti määrätty, kun alkuehto on annettu. Jos siis saamme tavalla tai toisella ratkaisun, se on ainoa oikea.

Palataan takaisin liikkeen mallintamiseen tasoliikkeenä. Esitetään yhtälö (3.16) ortonormaalissa kannassa $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$, jossa $\mathbf{u}_r$ on paikkavektorin (x, y) suuntainen (hetkellä t). Tämä kanta on

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \frac{1}{r}(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \\ \mathbf{u}_\theta &= \frac{1}{r}(-y, x) = (-\sin\theta, \cos\theta). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Newtonin vetovoimalain mukaan

$$\mathbf{F} = -\frac{Km}{r^2}\,\mathbf{u}_r, \tag{3.18}$$

jossa vakio K sisältää auringon massan. Vektorilla $\mathbf{a}$ on kannassa $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$ yksikäsitteinen esitys

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{u}_r + a_\theta\,\mathbf{u}_\theta, \quad a_r, a_\theta \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

jossa $a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r$ ja $a_\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_\theta$. Koska $\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$, yhtälöistä (3.15) ja (3.17) saadaan pienellä laskulla

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Yhtälöt (3.16), (3.18) ja (3.19) antavat $a_r = -K/r^2$ ja $a_\theta = 0$. Kun vielä sijoitetaan yhtälö (3.20), saadaan planeetan liikkeen DY-systeemi napakoordinaateissa

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 &= -\frac{K}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Siis pätee

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = c_1. \tag{3.22}$$

Yhtälöllä (3.22) on tulkinta (Keplerin toinen laki): Olkoon $A(t)$ paikkavektorin (x, y) ajassa t pyyhkimä ala. Silloin

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{c_1}{2} \Rightarrow A(t) = \frac{1}{2}c_1 t \quad (A(0) = 0).$$

Jos parista (3.21) eliminoitaisiin (3.22):n avulla θ pois, saataisiin

$$\ddot{r} + \frac{K}{r^2} - \frac{c_1^2}{r^3} = 0,$$

joka on 2. kl. epälineaarinen DY. Se kyllä ratkeaisi implisiittimuotoon, mutta hankalaan. Sen sijaan lasketaan θr-faasiavaruudessa liikkeen rata (orbit) $r = r(\theta)$. Koska $r(t) = r(\theta(t))$, niin käyttäen yhtälöä (3.22) saadaan

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = c_1 r^{-2}\frac{dr}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt}\Big(c_1 r^{-2}\frac{dr}{d\theta}(\theta(t))\Big) = c_1\Big(-2r^{-3}\dot{r}\frac{dr}{d\theta} + r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\dot{\theta}\Big) = c_1\Big(-2c_1 r^{-5}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + c_1 r^{-4}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big) \\ &= -c_1^2 r^{-2}\Big(2r^{-3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 - r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Siirrytään funktioon

$$u(\theta) = r(\theta)^{-1}, \tag{3.24}$$

jolloin

$$\frac{du}{d\theta} = -r^{-2}\frac{dr}{d\theta}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2r^{-3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 - r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}. \tag{3.25}$$

Siten

$$\ddot{r} = -c_1^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \text{ja} \quad -Ku^2 = -Kr^{-2} = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -c_1^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - c_1^2u^3,$$

josta saadaan 2. kl. lineaarinen, vakiokertoiminen DY

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = Kc_1^{-2}. \tag{3.26}$$

Se osataan ratkaista: HY:n pj. on $(\cos\theta, \sin\theta)$, sillä $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$. EHY:llä (3.26) on yksittäisratkaisu $u \equiv Kc_1^{-2}$. Siten EHY:n yleinen ratkaisu on

$$u(\theta) = Kc_1^{-2} + c_2\cos\theta + c_3\sin\theta = Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta), \tag{3.27}$$

jossa $c = (c_2^2 + c_3^2)^{1/2}$ ja δ on vektorin (c_2, c_3) suuntakulma. Siten

$$r(\theta) = u(\theta)^{-1} = \Big(Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\Big)^{-1}. \tag{3.28}$$

Tyypillisessä alkuehdossa on annettu $x(t_0)$, $y(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ ja $\dot{y}(t_0)$. Välikommentti: Jotta liike voidaan käsitellä xy-tasossa, xyz-avaruudessa täytyy päteä $z(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$. Annetuista alkuarvoista voidaan laskea $r_0 = r(t_0)$, $\theta_0 = \theta(t_0)$, $\dot{r}_0 = \dot{r}(t_0)$ ja $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t_0)$, joista saadaan

$$r(\theta_0) = r_0 \quad \text{ja} \quad \frac{dr}{d\theta}(\theta_0) = \dot{r}(t_0)/\dot{\theta}(t_0) = \dot{r}_0/\dot{\theta}_0. \tag{3.29}$$

Vastaavasti

$$u(\theta_0) = 1/r_0 \quad \text{ja} \quad \frac{du}{d\theta}(\theta_0) = -r(\theta_0)^{-2}\frac{dr}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}. \tag{3.30}$$

Parametreille c_1 c ja δ saadaan yhtälöryhmä

$$c_1 = r_0^{-2}\dot{\theta}_0, \quad Kc_1^{-2} + c\cos(\theta_0 - \delta) = r_0^{-1}, \quad c\sin(\theta_0 - \delta) = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}. \tag{3.31}$$

Rata voidaan kirjoittaa muotoon

$$r(\theta) = \frac{ep}{1 + e\cos(\theta - \delta)}, \tag{3.32}$$

jossa $e = cc_1^2/K$ ja $p = 1/c$. Tunnetusti kyseessä on napakoordinaateissa esitetty kartioleikkaus, jonka eksentrisyys on e. Jos $e < 1$, rata on ellipsi, jonka toinen polttopiste on origossa, siis auringon kohdalla. Tämä tunnetaan Keplerin ensimmäisenä lakina. Funktiolle $\theta = \theta(t)$ saadaan 1.kl. separoituva DY

$$\dot{\theta}(t) = c_1r^{-2} = c_1\Big(Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\Big)^2. \tag{3.33}$$

Huomautettakoon lopuksi, että ratkaisu pätee kaikelle liikkeelle, jossa vaikuttaa Newtonin vetovoimalain muotoa oleva keskeisvoima, joka on siis suuruudeltaan kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Sähköinen vetovoima on tällainen, mikä antaa klassisen vetyatomimallin: elektroni kiertää protonia pitkin ellipsirataa.

4 Yleistä teoriaa

4.1 Lipschitz-jatkuvuus ja aputuloksia

Tässä luvussa tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisen differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävän

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4.1}$$

ratkaisun olemassaoloa, ainakin lokaalisti, ja sen yksikäsitteisyyttä. Tietyin funktiota $f(x, y)$ koskevin oletuksin ratkaisun (lokaali) olemassaolo ja (globaali) yksikäsitteisyys ovat taatut. Alaluvussa 4.2 esitettävä todistus perustuu nk. *Picardin peräkkäisten approksimaatioiden menetelmään.* Aloitetaan funktiota $f(x, y)$ koskevilla ehdoilla.

Definition 4.1.

(1) Olkoon I väli $\mathbb{R}$:ssä. Funktio $h : I \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz-jatkuva (Lip-jva) välillä I*, jos on olemassa sellainen vakio $M \geq 0$, että

$$|h(x) - h(y)| \leq M|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in I. \tag{4.2}$$

(2) Olkoon H tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko. Funktio $f : H \to \mathbb{R}$ on *H:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen*, jos on olemassa sellainen vakio $M \geq 0$, että

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{kaikilla } (x, y_1),\ (x, y_2) \in H. \tag{4.3}$$

(3) Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue (erityisesti avoin joukko). Funktio $f : D \to \mathbb{R}$ toteuttaa *D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta*, jos jokaista pistettä $(x_0, y_0) \in D$ kohti löytyy sellaiset $p, q > 0$, että

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq p,\ |y - y_0| \leq q\} \subset D,$$

ja funktio f on K:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.

Huom. Kohdan (3) edellyttämä Lipschitz-vakio $M = M_K$ riippuu hyvinkin suorakaiteesta K ja siten pisteestä (x_0, y_0).

Esimerkki 4.1. (a) Olkoon funktio $h : I \to \mathbb{R}$ derivoituva, ja oletetaan että $\sup_{x \in I} |h'(x)|$ on äärellinen, siis luku. Tällöin h on Lip-jva I:ssä.

Perustelu: Luku $M = \sup_{x \in I} |h'(x)|$ kelpaa Lip-vakioksi, sillä väliarvolauseen nojalla kaikilla $x, y \in I$, $x < y$, pätee ($\xi \in]x, y[$ on väliarvo)

$$|h(x) - h(y)| = |h'(\xi)(x - y)| \leq |h'(\xi)||x - y| \leq M|x - y|.$$

(b) Funktio $h(x) = \sqrt{|x|}$ ei ole Lip-jva välillä I, jos $0 \in I$, vaikka $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jva.

Perustelu: Olkoon $0 \in I$, ja oletetaan että h olisikin Lip-jva I:ssä Lip-vakiona $M > 0$. Silloin

$$|h(x) - h(0)| = \sqrt{|x|} = |x|^{1/2} \leq M[x - 0] = M|x| \leftrightarrow 0 < M^{-1} \leq |x|^{1/2} \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Kuitenkin $\lim_{x \to 0} |x|^{1/2} = 0$, mikä antaa ristiriidan edelliseen arvioon.

(c) Olkoon funktio $f(x, y)$ muotoa $f(x, y) = g(x)y$, jossa funktio g on jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin f on rajoittamattomassa suorakaiteessa $K = [a, b] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lip-jva muuttujan y suhteen.

Perustelu: Koska g on jatkuva rajoitetulla suljetulla välillä $[a, b]$, tunnetusti on olemassa $M = \max_{x \in [a,b]} |g(x)| < \infty$. Olkoot (x, y_1) ja $(x, y_2) \in K$. Silloin

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |g(x)y_1 - g(x)y_2| = |g(x)||y_1 - y_2| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Lemma 4.2. *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ siinä määritelty funktio, jolla on jatkuva osittaisderivaatta $\partial f / \partial y : D \to \mathbb{R}$. Tällöin*

(a) funktio f toteuttaa D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta,

(b) se on jokaisessa suorakaiteessa $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\} \subset D$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.

Proof. (a) Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Valitaan sellaiset $p, q > 0$ että

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\} \subset D.$$

Tämä on mahdollista, sillä D on avoin joukko $\mathbb{R}^2$:ssa. Koska derivaattafunktio $\partial f / \partial y$ on jatkuva, niin suljetussa ja rajoitetussa (kompaktissa) joukossa K tunnetusti on olemassa maksimi

$$M = M_K = \max_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \infty.$$

Olkoot (x, y_1) ja $(x, y_2) \in K$, $y_1 < y_2$. Väliarvolauseen nojalla ($\xi \in]y_1, y_2[$ on väliarvo)

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y_1 - y_2| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Myös kohta (b) tuli samalla todistetuksi. □

Seuraava lause poimii hyödyllisen aputuloksen sarjateoriasta.

Lemma 4.3. *Olkoon I väli $\mathbb{R}$:ssä, ja olkoot funktiot $u_k : I \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, sellaisia että*

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq a_n \quad \textit{kaikilla } x \in I, \tag{4.4}$$

jossa majoranttijono (a_n), $a_n \geq 0$, on summautuva eli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Tällöin funktiojono (u_n) suppenee tasaisesti välillä I kohti funktiota

$$u(x) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big), \quad x \in I. \tag{4.5}$$

Proof. Kaikilla $n \geq 2$ on voimassa

$$u_n(x) = u_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(u_{i+1}(x) - u_i(x)\big). \quad (*)$$

Kiinnitetään $x \in I$. Silloin reaalilukujonolle $\big(u_n(x)\big)$ saadaan arvio: kun $n > k$, niin yhtälön $(*)$ mukaan

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leq \Big| \sum_{i=k}^{n-1} \big(u_{i+1}(x) - u_i(x)\big) \Big| \leq \sum_{i=k}^{n-1} \big|u_{i+1}(x) - u_i(x)\big| \leq \sum_{i=k}^{n-1} a_i \leq \sum_{i=k}^{\infty} a_i. \quad (**)$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\sum a_i < \infty$, löytyy sellainen rajaindeksi n_ϵ, että $\sum_{i=n_\epsilon}^{\infty} a_i < \epsilon$. Siten arvion $(**)$ mukaan, ja koska $a_i \geq 0$,

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n_\epsilon}^{\infty} a_i < \epsilon$$

aina kun $n, k \geq n_\epsilon$. Reaalilukujono $\big(u_n(x)\big)$ on siis Cauchy, ja siten se tunnetusti suppenee. Siis on olemassa

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_1(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \big(u_{i+1}(x) - u_i(x)\big) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big),$$

joka samalla määrittelee funktion $u : I \to \mathbb{R}$. Funktiojono (u_n) suppenee siis vähintään pisteittäin tätä funktiota kohti.

Lopuksi, olkoon $\epsilon > 0$. Silloin kaikilla $n \geq n_\epsilon$ ja $x \in I$ pätee

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \big|u_{i+1}(x) - u_i(x)\big| \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n_\epsilon}^{\infty} a_i < \epsilon,$$

joten funktiojonon suppeneminen on peräti tasaista välillä I. □

4.2 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseita

Theorem 4.4 (Lokaali OY-lause)**.** *Olkoon $D \subset E \subset \mathbb{R}^2$, jossa D on alue. Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ alueessa D jatkuva, ja toteuttakoon se siinä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että alkuarvotehtävällä

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4.6}$$

on ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ välillä $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

(b) Olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (4.6) ratkaisua, joiden kuvaajat kulkevat D:ssä, ts. $(x, y_k(x)) \in D$ kaikilla $x \in I_k$, $k = 1, 2$. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \textit{kaikilla } x \in I_1 \cap I_2. \tag{4.7}$$

Proof. Jaetaan todistus osiin.

Vaihe 1, muuntaminen integraaliyhtälöksi

Olkoon y AAT:n (4.6) ratkaisu välillä I, jolloin

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{kaikilla } x \in I, \text{ ja pätee } y(x_0) = y_0. \tag{4.8}$$

Siten

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

eli

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \quad \text{kaikilla } x \in I. \tag{4.9}$$

Kääntäen, jos jatkuva funktio $y : I \to \mathbb{R}$ toteuttaa integraaliyhtälön (4.9), niin se on derivoituva funktio ja

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\Big) = f(x, y(x)) \quad \text{kaikilla } x \in I,$$

ja lisäksi $y(x_0) = y_0$. Siten yhtälöt (4.8) ja (4.9) ovat jatkuville funktioille yhtäpitävät. Jatkossa ratkaistaan nimenomaan integraaliyhtälö (4.9).

Vaihe 2, Picardin iteraatio

Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Etsitään ratkaisua paikallisesti, suorakaiteessa

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le p,\ |y - y_0| \le q\}.$$

Koska D on alue (avoin), vakiot $p > 0$ ja $q > 0$ voidaan valita niin pieniksi, että ensinnäkin $K \subset D$, ja toiseksi f on K:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Olkoon joukkoon liittyvä Lipschitz-vakio $M = M_K > 0$.

Voidaan olettaa että $\|f\| = \sup_{(x,y)\in K} |f(x, y)| > 0$, sillä muussa tapauksessa $f \equiv 0$ suorakaiteessa K, ja AAT:llä (4.6) on välillä $]x_0 - p, x_0 + p[$ ratkaisu $y(x) \equiv y_0$. Lauseessa mainitun ratkaisuvälin säteeksi δ voidaan valita

$$\delta = \min\left\{p, \frac{q}{\|f\|}\right\} > 0. \tag{4.10}$$

Merkitään $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, ja määritellään rekursiivisesti funktiot (Picardin approksimaatiot) $y_n : I \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, asettamalla kaikilla $x \in I$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \\
&\ \vdots \\
y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

On huolehdittava siitä, että määritelmä (4.11) on hyvin tehty, mikä vaatii että $(x, y_n(x)) \in D$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in I$, ja että funktiot y_n ovat jatkuvia.

Jälkimmäinen vaatimus todistuu heti induktiolla, koska $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$ on jatkuva, jos y on jatkuva, sillä oletuksen mukaan f on jatkuva. Ensimmäisen vaatimuksen osalta osoitetaan enemmänkin, induktiolla n:n suhteen että

$$(x, y_n(x)) \in K \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ ja } x \in I, \tag{4.12}$$

mikä toimii jatkossa. Kun $n = 0$ asia selvä, sillä $\delta \leq p$. Päteköön (4.12) jollakin $n \in \mathbb{N}$. Olkoon vaikka $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ (tapaus $x_0 - \delta < x < x_0$ hoituu vastaavasti). Silloin (4.11):n mukaan, ja koska induktio-oletuksen mukaan $(t, y_n(t)) \in K$,

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} \|f\|\, dt = \|f\|(x - x_0) < \|f\|\delta \leq q.$$

Siten (4.12) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Vaihe 3, funktiojonon suppeneminen

Koska $f(x, y)$ on K:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, pätee

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{kaikilla } (x, y_1), (x, y_2) \in K.$$

Toisaalta Picardin approksimaatioille pätee relaatio (4.12). Osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että niille pätee myös arvio

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ ja } x \in I. \tag{4.13}$$

Olkoon vaikka $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ (tapaus $x_0 - \delta < x < x_0$ hoituu vastaavasti). Kun $n = 0$, niin

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \leq \|f\|(x - x_0) = \frac{M^0 \|f\|}{1!} |x - x_0|^1.$$

Päteköön (4.13) jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin induktio-oletuksen ja edellä sanotun nojalla

$$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \big|f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))\big|\, dt \leq$$
$$\int_{x_0}^{x} M|y_{n+1}(t) - y_n(t)|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} M \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} (t - x_0)^{n+1}\, dt = \frac{M^{n+1} \|f\|}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n+1}\, dt$$
$$\frac{M^{n+1} \|f\|}{(n+2)!} \Big|_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n+2} = \frac{M^{n+1} \|f\|}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2},$$

mikä täydentää induktion ja siten osoittaa arvion (4.13) todeksi.

Sovelletaan lemmaa 4.3 funktiojonoon $(y_n(x))$. Asetetaan majoranteiksi $a_n \geq 0$ luvut

$$a_n = \frac{M^n \|f\| \delta^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin arvion (4.13) perusteella pätee

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n \|f\| \delta^{n+1}}{(n+1)!} = a_n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ ja } x \in I,$$

ja toisaalta pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\frac{\|f\|}{M} + \frac{\|f\|}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M\delta)^n}{n!} = \frac{\|f\|}{M} \Big(e^{M\delta} - 1 \Big) < \infty.$$

Lemman 4.3 mukaan funktiojono $(y_n(x))$ suppenee tasaisesti välillä I kohti funktiota

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \big(y_{n+1}(x) - y_n(x) \big). \tag{4.14}$$

Koska funktiot y_n ovat jatkuvia, kuten vaiheessa 2 todettiin, tunnetusti myös niiden tasainen raja y on jatkuva välillä I. Lisäksi sille selvästi pätee $(x, y(x)) \in K$ kaikilla $x \in I$.

Vaihe 4, saatu funktio (4.14) toteuttaa yhtälön (4.9)

Osoitetaan aluksi että

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{kaikilla } x \in I, \tag{4.15}$$

jossa y on funktio (4.14). Olkoon vaikka $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ (tapaus $x_0 - \delta < x < x_0$ hoituu vastaavasti). Tällöin

$$0 \leq \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \Big| \leq \int_{x_0}^{x} \big| f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)) \big|\, dt \leq$$
$$M \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y(t)|\, dt \leq \sup_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| M(x - x_0) \leq \sup_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| M\delta \to 0,$$

kun $n \to \infty$, sillä tasaisen suppenemisen $y_n \to y$ vuoksi $\sup_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| \to 0$.

Yhtälön (4.15) nojalla kaikilla $x \in I$ pätee

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n \to \infty} \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt \Big) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

siis funktio y toteuttaa (4.9):n. Koska se on lisäksi jatkuva, se toteuttaa (4.8):n, ja on siten AAT:n (4.6) ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ välillä $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, jossa δ on kuten (4.10):ssä. Siten (a)-kohta, lokaali olemassaolo, on todistettu.

Kohta (b) osoitetaan kahdessa vaiheessa.

Vaihe 5, lokaali yksikäsitteisyys

Käytetään nk. kiristyvän silmukan (bootstrap) argumenttia. Olkoot $z_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (4.6) ratkaisua. Ne toteuttavat inttegraaliyhtälön (4.9). Löytyy sellainen $\delta' > 0$, että $I' =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\subset I_1 \cap I_2$, ja funktioiden z_k jatkuvuuden perusteella $(x, z_k(x)) \in K$ kaikilla $x \in I'$, $k = 1, 2$, jossa K on alkuosassa kiinnitetty suorakaide. Todistuksessa aikaisemmin määritelty δ ei siis suoralta kädeltä kelpaa, sillä jatkossa arviot vaativat että funktioiden z_k kuvaajat pysyvät suorakaiteessa K. Osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että kyseisten funktioiden erotukselle pätee

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leq 2qM^n \frac{|x-x_0|^n}{n!} \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \cdots \text{ ja } x \in I'. \tag{4.16}$$

Olkoon vaikka $x_0 \leq x < x_0 + \delta'$ (tapaus $x_0 - \delta' < x < x_0$ hoituu vastaavasti). Kun $n = 1$, niin yhtälön (4.9) mukaan - ja koska pysytään suorakaiteessa K -

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, z_1(t)) - f(t, z_2(t))| \, dt \leq$$
$$M \int_{x_0}^{x} |z_1(t) - z_2(t)| \, dt \leq M \int_{x_0}^{x} 2q \, dt = 2qM \frac{|x-x_0|^1}{1!}.$$

Päteköön (4.16) jollakin n. Tällöin induktio-oletuksen nojalla

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leq M \int_{x_0}^{x} |z_1(t) - z_2(t)| \, dt \leq M * 2q \frac{M^n}{n!} \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \, dt =$$
$$2q \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{x_0}^{x} (t-x_0)^{n+1} = 2qM^{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

joten (4.16) on osoitettu.

Koska $\sum_{n=0}^{\infty} M^n |x-x_0|^n / n! = e^{M|x-x_0|} < \infty$, niin $\lim_{n\to\infty} M^n |x-x_0|^n / n! = 0$. Siten arviosta (4.16) seuraa että $z_1(x) = z_2(x)$ kaikilla $x \in I'$, siis lokaali yksikäsitteisyys.

Vaihe 6, globaali yksikäsitteisyys

Pyritään välttämään topologisia argumentteja, jotka kyllä tekisivät päättelystä lyhyen. Olkoot $z_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (4.6) ratkaisua, joilla $\{(x, z_k(x)) \,|\, x \in I_k\} \subset D$, $k = 1, 2$. Tehdään vastaoletus: Löytyy sellainen $x \in I_1 \cap I_2$, että $z_1(x) \neq z_2(x)$. Oletetaan että tämä $x > x_0$ (tapaus $x < x_0$ hoituu vastaavasti). Silloin on olemassa

$$x_1 = \inf\{x \in I_1 \cap I_2 \,|\, z_1(x) \neq z_2(x), x > x_0\}, \tag{4.17}$$

sillä kyseinen joukko on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu x_0:lla. Pätee $x_1 > x_0$, sillä lokaalin yksikäsitteisyyden nojalla z_1 ja z_2 yhtyvät jossain x_0:n ympäristössä. Koska $z_1(x) = z_2(x)$ kaikilla $x \in [x_0, x_1[$, ja funktiot ovat jatkuvia, niin $z_1(x_1) = z_2(x_1)$. Siten z_1 ja z_2 ovat AAT:n

$$y' = f(x, y), \quad y(x_1) = z_1(x_1) = z_2(x_1),$$

ratkaisuja. Koska oletuksen mukaan $(x_1, z_1(x_1)) \in D$, vaiheen 5 mukaan löytyy sellainen $\delta' > 0$, että $z_1(x) = z_2(x)$ kaikilla $x \in]x_1 - \delta', x_1 + \delta'[$, mikä on vastoin x_1:n valintaa (4.17). Saatu ristiriita osoittaa, että

$$z_1(x) = z_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in I_1 \cap I_2.$$

$\square$

Huom.1. Luvussa 1 esitetty OY-lause 1.2 seuraa välittömästi lauseesta 4.4 ja lemmasta 4.2.

Huom.2. Eräs Picardin todistuksen etu on puolikonkreettinen alaraja (4.10) ratkaisuvälin pituudelle. Se riippuu vain funktiosta $f(x, y)$ ja siitä, kuinka lähellä alueen D reunaa alkuehtopiste (x_0, y_0) on. Seikkaa hyödynnetään tuonnempana.

Huom.3. Voidaan todistaa että jos funktio $f(x,y)$ on vain jatkuva alueessa D, niin AAT:llä (4.6) on kyllä lokaali ratkaisu, mutta tämän edes lokaali yksikäsitteisyys vaatii jonkin Lipschitzin kaltaisen lisäehdon.

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Yhtälö on separoituva; ratkaistaan se eksplisiittisesti. Triviaaliratkaisu $y \equiv 0$ on AAT:n ratkaisu. Separoidaan:

$$y^{-2/3}\,dy = dx \Leftrightarrow \int y^{-2/3}\,dy = \int dx \Leftrightarrow 3y^{1/3} = x + C_1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{27}(x-C)^3.$$

Valitsemalla $C = 0$ saadaan AAT:lle toinen ratkaisu $y = x^3/27$. Itse asiassa AAT:llä on ∞-monta ratkaisua, esimerkiksi jokaista $C > 0$ kohti funktio

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \le C, \\ (1/27)(x-C)^3, & x > C. \end{cases}$$

Toisaalta funktio $f(x,y) = y^{2/3}$ on jatkuva koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Jokin muu OY-lauseen 4.4 oletuksista ei siis päde, ainakaan koko tasossa. Funktio f ei olekaan tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen missään suorakaiteessa, joka sisältää muotoa $(x,0)$ olevia pisteitä. Epäsuora todistus: Olisipas; voidaan olettaa että $M > 0$. Tällöin

$$|f(x,y) - f(x,0)| = y^{2/3} \le M|y-0| \Leftrightarrow 0 < M^{-1} \le |y|^{1/3} \to 0,$$

kun $y \to 0$, ristiriita. Havaitaan siis, että Lipschitz-ehto on yksikäsitteisyydelle oleellinen.

Sen sijaan lemman 4.2 nojalla yhtälö $y' = y^{2/3}$ toteuttaa OY-lauseen 4.4 ehdot alueissa

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad \text{ja} \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\},$$

koska myös osittaisderivaatta $\partial f/\partial y = (2/3)y^{-1/3}$ on jatkuva niissä. Mutta alkuehtopiste $(0,0)$ ei kuulu kumpaankaan, ja ratkaisuja onkin useita.

Theorem 4.5 (Maksimaaliratkaisu). *Pätekööt lauseen 4.4 oletukset. Tällöin AAT:llä (4.6) on ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, jolla $(x, y(x)) \in D$ kaikilla $x \in I$ ja joka on maksimaalinen siinä mielessä, että kaikki kyseisen AAT:n muut kuvaajaltaan alueessa D pysyvät ratkaisut ovat sen rajoittumia. Lisäksi väli I on avoin.*

Proof. Olkoot $y_j : I_j \to \mathbb{R}$, $j \in J$, kaikki ne AAT:n (4.6) ratkaisut, joiden kuvaaja pysyy alueeessa D; väli I_j saa olla avoin, puoliavoin tai suljettu. Asetetaan

$$I = \bigcup_{j \in J} I_j \quad \text{ja} \quad y : I \to \mathbb{R}, \quad y(x) = y_j(x) \quad \text{aina kun } x \in I_j. \tag{4.18}$$

Yksikäsitteisyyden, lauseen 4.4 kohdan (b) nojalla, funktio y on hyvin määritelty. Jos $x \in I$ on I:n sisäpiste, se on jonkin I_j:n sisäpiste, ja koska y yhtyy kyseiseen y_j:hin jossain x:n ympäristössä, funktio y on derivoituva pisteessä x ja toteuttaa siinä DY:n (4.6). Jos taas $x \in I$ on I:n (vielä mahdollinen) päätepiste, se myös jonkin I_j:n päätepiste, ja kyse on toispuoleisesta derivaatasta, muuten samat sanat kuin edellä. Lisäksi selvästi $y(x_0) = y_0$.

Siten funktio y on AAT:n (4.6) ratkaisu välillä I, sen kuvaaja pysyy alueessa D, ja sillä on jo määritelmänsä perusteella lauseessa väitetty yksikäsitteisyysominaisuus. Se on siis AAT:n (4.6) *maksimaaliratkaisu* alueessa D.

Osoitetaan lopuksi I avoimeksi. Vastaoletus: Väli I sisältää ainakin toisen päätepisteensä. Olkoon tämä x_1. Koska $(x_1, y(x_1)) \in D$, lauseen 4.4 nojalla AAT:llä

$$z' = f(x, z), \quad z(x_1) = y(x_1),$$

on ratkaisu z jollain välillä $I' =]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$, jossa $\delta > 0$. Myös y on kyseisen AAT:n ratkaisu. Koska lauseen 4.4 yksikäsitteisyyspuolen nojalla $y(x) = z(x)$ pisteissä $x \in I \cap I'$, funktio y voidaan jatkaa funktiolla z AAT:n (4.6) alueessa D kulkevaksi ratkaisufunktioksi $u : I \cup I' \to \mathbb{R}$, mikä on vastoin ratkaisuvälin I maksimaalisuutta. Siten I on avoin väli. □

Theorem 4.6 (OY-lauseen globaali muoto)**.** *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, joka voi olla rajoittamatonkin. Olkoon funktio $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja lisäksi kaikilla (kompakteilla) osaväleillä $[a, b] \subset I$ suorakaiteessa $[a, b] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Olkoon $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvoethtävällä (4.6),*

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(x_0) = y_0,$$

on koko välillä I määritelty ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Kaikki I:n osaväleillä annetut AAT:n (4.6) ratkaisut ovat sen rajoittumia.

Proof. Todistus on pitkälti sama kuin lauseen 4.4 alkuosan. Tämän vaiheeseen 1 ei tule mitään muutoksia. Vaiheessa 2 suorakaiteeksi voidaan valita

$$K = [a, b] \times \mathbb{R} \subset I \times \mathbb{R}$$

ja ratkaisuväliksi $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Koska K on y:n suhteen rajoittamaton, Picardin approksimaatioille y_n automaattisesti pätee

$$(x, y_n(x)) \in K \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ ja } x \in [a, b].$$

Vaiheen 3 arviossa (4.13) maksimi $\|f\|$ korvataan luvulla $\max_{x \in [a,b]} |f(x, y_0)| < \infty$ (kuten sielläkin voitaisiin) ja majoranteissa a_n säde δ korvataan luvulla $b - a$, kuten tarvittaessa muulloinkin. Muuten vaiheet 3 ja 4 säilyvät entisellään. Kuten lauseen 4.4 alkuosassa, nyt saadaan vastaavasti AAT:n (4.6) ratkaisu $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Olkoon sitten $[a_j, b_j] \subset I$, $j = 1, 2, \cdots$, sellainen nouseva jono x_0:n sisältäviä välejä, että $I = \cup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$. Alkuosan perusteella AAT:llä (4.6) on ratkaisut $y_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}$. Aivan kuten lauseen 4.5 todistuksessa, lauseen 4.4 kohdan (b) nojalla saadaan hyvin määritelty, derivoituva funktio $y : I \to \mathbb{R}$,

$$y(x) = y_j(x) \quad \text{aina kun } x \in [a_j, b_j],$$

joka on AAT:n (4.6) ratkaisu välillä I.

Lauseen loppuosassa esitetty yksikäsitteisyys seuraa heti lauseen 4.4 kohdasta (b). □

Huom. Lineaarinen 1.kl. yhtälö toteuttaa lauseen 4.6 ehdot, jos sen kerroinfunktiot ovat jatkuvia, vrt. esimerkki 4.1 (c). Tästä(kin) seuraa lineaarisille yhtälöille ratkaisun globaalisuus.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan yhtälöä

$$y' = f(x,y) = \frac{y^3 e^x}{1+y^2} + x^2 \sin y.$$

Selvästi f ja $\partial f/\partial y \in C(\mathbb{R}^2)$. Enemmänkin, olkoon $a > 0$. Silloin

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big| = \Big|\frac{y^4+3y^2}{(1+y^2)^2} e^x + x^2 \cos y\Big| \le 3e^a + a^2 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in [-a,a] \times \mathbb{R}.$$

Siten väliarvolauseen nojalla f on joukossa $[-a,a] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen; Lip-vakioksi kelpaa $M = 3e^a + a^2$. Koska tämä pätee kaikilla $a > 0$, niin tarkasteltava yhtälö toteuttaa globaalin OY-lauseen 4.6 ehdot alueessa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ja siis $I = \mathbb{R}$. Jos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, niin tällä alkuehdolla varustetulla AAT:llä on lauseen 4.6 mukaan koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty ratkaisu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis tarkasteltavan yhtälön kaikki (maksimaali)ratkaisut ovat olemassa koko $\mathbb{R}$:ssä.

Todistetaan luvun lopuksi vielä Poistumislause. Selvyyden vuoksi esitetään se tässä uudestaan, yksityiskohtaisemmassa muodossa.

Theorem 4.7 (Poistumislause)**.** *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio f sekä sen osittaisderivaatta $\partial f/\partial y$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin AAT:llä (4.6),

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(x_0) = y_0,$$

on (maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, jossa I on avoin, ratkaisukäyrä $\{(x, y(x)) \,|\, x \in I\}$ kulkee alueessa D, ja sillä on ominaisuus: jokaista kompaktia (=suljettua ja rajoitettua) joukkoa $K \subset D$ kohti löytyy sellaiset vakiot $a = a_K \in I$ ja $b = b_K \in I$, $a < b$, että

$$\big(x, y(x)\big) \in D \setminus K \quad \textit{kaikilla } x \in I, \textit{ joilla } x < a \textit{ tai } x > b. \tag{4.19}$$

(b) (Maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on yksikäsitteisesti määrätty, ja kaikki muut D:ssä pysyvät AAT:n (4.6) ratkaisut ovat sen rajoittumia.

Proof. Lause 4.5 antaa AAT:n (4.6) maksimaaliratkaisun $y : I \to \mathbb{R}$, jossa väli I on avoin, kuvaaja kulkee alueessa D, ja joka suoralta kädeltä toteuttaa yksikäsitteisyyskohdan (b). Kohdasta (a) jää todistettavaksi, että tämä y toteuttaa myös kompakteihin joukkoihin $K \subset D$ liittyvän ominaisuuden.

Olkoon $I =]\alpha, \beta[$, jossa $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ja $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vastaoletus: Löytyy kompakti $K \subset D$, jota kohti ei ole vakioita a ja b toteuttamaan relaatio (4.19). Voidaan olettaa että b puuttuu (tapaus puuttuva a hoituu vastaavasti). Tällöin on olemassa I:n pisteiden jono (x_i), jolle pätee

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \beta \quad \text{ja} \quad \big(x_i, y(x_i)\big) \in K \text{ kaikilla } i = 1, 2, \cdots.$$

Ei taideta välttyä tyystin topologian käytöltä. Niinpä, koska K on kompakti, tunnetusti sen pisteiden jonolla $\big((x_i, y(x_i))\big)$ on jotain pistettä $(x_K, y_K) \in K$ kohti suppeneva osajono $\big((z_k, y(z_k))\big) = \big((x_{i_k}, y(x_{i_k}))\big)$. Koska osajonon raja-arvo on aina sama kuin koko jonon (mikäli tämä on olemassa), niin

$$\beta = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{k\to\infty} x_{i_k} = \lim_{k\to\infty} z_k = x_K;$$

päätepiste β on välttämättä äärellinen.

Koska K on kompakti, niin sen etäisyys D:n komplementtiin on aidosti positiivinen:

$$2d\sqrt{2} = d\big(K, \mathbb{R}^2 \setminus D\big) > 0.$$

Joukko

$$K' = \bar{B}(K, d\sqrt{2}) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, d\big((x, y), K\big) \le d\sqrt{2}\big\}$$

on suljettuna ja rajoitettuna kompakti, ja sille pätee $K \subset K' \subset D$. Olkoon $(s, t) \in K$. Tällöin pätee

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - s| \le d,\ |y - t| \le d\} \subset K'.$$

Olkoon vielä $\|f\| = \max_{(x,y)\in K'} |f(x, y)|$. Se on äärellinen, koska K' on kompakti ja f jatkuva siinä. Sovelletaan lauseen 4.4 todistuksen alun tarkasteluja suorakaiteeseen R, jossa f on lemman 4.2 nojalla tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Saadaan yhtälöstä (4.10) tähän pätevä versio

$$\delta = \min\left\{d, \frac{d}{\|f\|}\right\} > 0, \tag{4.20}$$

ja lauseen 4.4 nojalla AAT:lle

$$z' = f(x, z), \quad z(s) = t, \tag{4.21}$$

alueessa D kulkeva ratkaisu $z : I' \to \mathbb{R}$ välille $I' =]s - \delta, s + \delta[$. Oleellista on ettei δ riipu alkuehtopisteestä $(s, t) \in K$.

Kiinnitetään seuraavaksi sellainen k, että $z_k = x_{i_k} > \beta - \delta/2$, ja valitaan alkuehtopisteeksi $(s, t) = (z_k, y(z_k)) \in K$. Tällöin myös funktio y on AAT:n (4.21) ratkaisu. Koska yksikäsitteisyyden nojalla $y(x) = z(x)$ kaikilla $x \in I \cap I'$, funktio y voidaan jatkaa funktiolla z AAT:n (4.6) ratkaisuksi $u : I \cup I' \to \mathbb{R}$. Välin I maksimaalisuuden vuoksi, ja koska nyt $s = z_k$, täytyy päteä

$$I' \subset I \Rightarrow z_k + \delta \le \beta \Leftrightarrow z_k \le \beta - \delta,$$

mikä on ristiriidassa k:n valinnan kanssa. Siten kaikki lauseen väitteet on todistettu. □

Huom. Kyllä Poistumislauseessa esiintyvä oletus derivaatan $\partial f/\partial y$ jatkuvuudesta voitaisiin korvata heikommalla oletuksella, että f toteuttaa D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta.

5 Differentiaaliyhtälösysteemit

5.1 Systeemi ja sen OY-lauseet

Aloitetaan parilla esimerkillä motivoimaan miksi systeemejä.

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan seuraavan kuvan kertomaa tilannetta, jossa kaksi samanlaista pallukkaa on kytketty toisiinsa ja seinämiin kolmella keskenään samanlaisella jousella. Jousivoimat ovat ainoat, joiden katsotaan vaikuttavan, massat ovat m ja jousille yhteinen jousivakio on k.

Kuva 5

Tutkitaan pallukoiden värähtelyä vaakatasossa. Sille alkutilanne luodaan pitämällä ensimmäinen pallukka tasapainotilanteen mukaisella paikalla, mutta toista poikkeutetaan oikealle, positiiviseen suuntaan, matkan $\alpha > 0$ verran, ja kumpikin lasketaan irti jolloin systeemi alkaa heilahdella edestakaisin vaakatasossa. Siten alkuehto on

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \quad x_2(0) = \alpha > 0 \\ \dot{x}_1(0) &= 0 \quad \dot{x}_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Hooken laki kertoo, että jousi vetää tai työntää pallukkaa kohti tasapainotilaa voimalla jonka suuruus on k kertaa poikkeama tasapainotilasta. Siten hetkellä t pallukoihin 1 ja 2 kohdistuvat jousivoimat ovat

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -kx_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t)) = -2kx_1(t) + kx_2(t), \\ F_2(t) &= -kx_2(t) - k(x_2(t) - x_1(t)) = kx_1(t) - 2kx_2(t). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Kuva 6

Newtonin toisen lain nojalla $F_k(t) = ma_k(t) = m\ddot{x}_k(t)$, $k = 1, 2$, mikä yhdessä yhtälöiden (5.2) kanssa antaa *differentiaaliyhtälösysteemin* (DYS)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) &= 0 \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + 2kx_2(t) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Se on lineaarinen ja sen kertaluku on kaksi. Yhdessä alkuehdon (5.1) kanssa DYS (5.3) muodostaa systeemin alkuarvotehtävän.

Esimerkki 5.2 (Kahden säiliön sekoitusongelma). Olkoot säiliöt A ja B täynnä suolaliuosta, ja olkoot niiden väliset ja muutkin virtaukset kuten seuraava kuva esittää.

Kuva 7

Olkoot säiliöiden A ja B suolan määrät (massat) ajan t funktioina $x(t)$ ja $y(t)$. Tankkiin A virtaavan suolaliuoksen suolapitoisuus olkoon a kg/l. Oletetaan liuosten sekoittuvan täydellisesti. Silloin suureen $x(t)$ muutosnopeus, eli funktiona sen derivaatta, on (ilman yksikköä, joka olisi kg/min)

$$\dot{x}(t) = 6a - 8 * \frac{x(t)}{24} + 2 * \frac{y(t)}{24}.$$

Vastaavasti suureen $y(t)$ muutosnopeus on

$$\dot{y}(t) = 8 * \frac{x(t)}{24} - 2 * \frac{y(t)}{24} - 6 * \frac{y(t)}{24},$$

ja saadaan lineaarinen 1.kl. DYS (pari)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{3}\,x(t) + \frac{1}{12}\,y(t) + 6a \\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{3}\,x(t) - \frac{1}{3}\,y(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ratkaistaan kyseinen pari malliksi nk. *eliminointikeinolla*: Derivoidaan ylempi (5.4), ja sijoitetaan tähän saatuun alempi (5.4), jolloin saadaan

$$\ddot{x} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{12}\dot{y} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{36}x - \frac{1}{36}y.$$

Toisaalta ylemmästä (5.4) saadaan $y = 12\dot{x} + 4x - 72a$, joka sijoitetaan edelliseen yhtälöön, jolloin y eliminoituu pois, ja saadaan

$$\ddot{x} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{36}x - \frac{1}{3}\dot{x} - \frac{1}{9}x + 2a \Leftrightarrow 12\ddot{x} + 8\dot{x} + x = 24a;$$

lineaarinen, vakiokertoiminen 2.kl. DY, joka osataan ratkaista.

HY: $12\ddot{x} + 8\dot{x} + x = 0$, karakteristinen yhtälö $12r^2 + 8r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1/2$ ja $r_2 = -1/6$. Siten HY:n pj. on $\big(e^{-t/2},\, e^{-t/6}\big)$.

EHY: Sillä on yksittäisratkaisu $x_p(t) \equiv 24a$. Siten EHY:n yleinen ratkaisu derivaattoineen on

$$x(t) = 24a + c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/6}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = -\frac{c_1}{2}e^{-t/2} - \frac{c_2}{6}e^{-t/6}.$$

Funktio $y(t)$ saadaan suoraan nimenomaan ensimmäisestä yhtälöstä (5.4) - *ei toisesta* - sijoittamalla saatu $x(t)$ ja sen derivaatta:

$$y(t) = 12\dot{x} + 4x - 72a = 24a - 2c_1 e^{-t/2} + 2c_2 e^{-t/6}.$$

Siis 1.kl. parin yleiseen ratkaisuun sisältyy kaksi parametria. Erityisesti kun $c_1 = c_2 = 0$, saadaan parin vakioratkaisu $x \equiv y \equiv 24a$. Tämä systeemin tila on stabiili, sillä kaikilla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, eli olipa alkutila mikä hyvänsä, lopulta lähestytään vakioratkaisua:

$$x(t),\, y(t) \longrightarrow 24a, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Siten suolapitoisuuksille käy kuten arvata saattaa: aikaa myöten

$$p_A = \frac{x(t)}{24} \longrightarrow a \quad \text{ja} \quad p_B = \frac{y(t)}{24} \longrightarrow a.$$

Tulemme tarkastelemaan differentiaaliyhtälösysteemeissä vakitilannetta, jossa yhtälöitä on yhtä monta kuin tuntemattomia raaliarvoisia funktioita (nämä yhden reaalimuuttujan funktioita). Olkoot kokoa n olevan systeemin vapaa muuttuja t ja tuntemattomat funktiot $x_k(t)$, $k = 1, \cdots, n$. Olkoot $f_k(t, x_1, \cdots, x_n)$, $k = 1, \cdots, n$, jossain $\mathbb{R}^{n+1}$:n (avoimessa) osajoukossa määriteltyjä, annettuja reaaliarvoisia funktioita. Käytännössä ne oletetaan vähintään jatkuviksi. Tällaisen, kokoa n olevan *ensimmäisen kertaluvun systeemin normaalimuoto* on

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1\big(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)\big),\\
\dot{x}_2(t) &= f_2\big(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)\big),\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= f_n\big(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)\big).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Olkoot vakiot t_0, $x_{10}, \cdots, x_{n0} \in \mathbb{R}$ annettuja. Systeemin (5.5) *alkuehto* kuuluu

$$x_k(t_0) = x_{k0}, \quad k = 1, \cdots, n. \tag{5.6}$$

Otetaan käyttöön vektorinotaatio, joka lyhentää ja selkeyttääkin esitystä. Merkitään funktiokokonaisuuksia $x_1, \cdots, x_n$ ja $f_1, \cdots, f_n$ vektoriarvoisina funktioina

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \big(x_1(t), \cdots, x_n(t)\big) = \big[x_1(t) \cdots x_n(t)\big]^T \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1},\\
\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) &= \big(f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(t, x_1, \cdots, x_n)\big) = \big[f_1(t, \mathbf{x}) \cdots f_n(t, \mathbf{x})\big]^T \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}.
\end{aligned}$$

Ne derivoidaan ja integroidaan komponentti komponentilta tyyliin $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$ ja

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big)\, dt = \Big(\int_{x_0}^{x} f_1\big(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)\big)\, dt, \cdots, \int_{x_0}^{x} f_n\big(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)\big)\, dt\Big).$$

Merkitään vastaavasti $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \cdots, x_{n0})$. Näin systeemi (5.5) saa tiiviin muodon

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big), \tag{5.7}$$

ja alkuehto (5.6) voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{5.8}$$

Tartutaan heti suoralta kädeltä differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyskysymyksiin. Lyhyesti voi todeta, että systeemeille pätevät vastaavat tulokset kuin yhdelle differentialiyhtälölle - eikä jälkimmäisten tulosten todistuksia (luku 4) tarvitse paljoakaan säätää jotta saadaan vastaavat systeemien tulokset. Hahmotellaan olennaisimmat muutokset ja kirjataan tulokset.

Definition 5.1. Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ alue (erityisesti avoin joukko). Vektorifunktio $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ toteuttaa *D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan* $\mathbf{x}$ *osalta*, jos jokaista pistettä $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ kohti löytyy sellaiset $p, q > 0$, että

$$K = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |t - t_0| \le p,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le q\} \subset D,$$

ja funktio $\mathbf{f}$ on lieriössä K tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $\mathbf{x}$ suhteen, ts. löytyy sellainen vakio $M = M_K \ge 0$ että

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \le M\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \text{kaikilla } (t, \mathbf{x}_1),\ (t, \mathbf{x}_2) \in K.$$

Lemma 5.2. *Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ alue, ja olkoon $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ siinä määritelty funktio, jonka komponenteilla on jatkuvat osittaisderivaatat $\partial f_k/\partial x_j : D \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, \cdots, n$, muuttujien x_j suhteen. Tällöin*

(a) funktio $\mathbf{f}$ toteuttaa D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan $\mathbf{x}$ osalta,

(b) se on jokaisessa lieriössä $K = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |t - t_0| \le p,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le q\} \subset D$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $\mathbf{x}$ suhteen.

Proof. Esitetään vain lemman 4.2 todistukseen tulevat muutokset. Olkoon $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in K$. Sovelletaan väliarvolausetta komponentteihin f_k: löytyy sellaiset pisteet $\mathbf{s}_k$ yhdistysjanoilta $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, että (kts. kurssi Vektorianalyysi)

$$f_k(t, \mathbf{x}_1) - f_k(t, \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{s}_k)(x_{j1} - x_{j2}) = \nabla f_k(t, \mathbf{s}_k) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Erityisesti $(t, \mathbf{s}_k) \in K$ kaikilla k. Gradienttivektori $\nabla f_k(t, \mathbf{x})$ on jatkuva funktio (sen komponentit, osittaisderivaatat ovat jatkuvia), joten sen normi on jatkuva reaaliarvoinen funktio, ja saavuttaa siten kompaktissa joukossa K maksiminsa:

$$M_k = \max_{(t,\mathbf{x}) \in K} \left\|\nabla f_k(t, \mathbf{x})\right\| < \infty, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Edellä esitetystä ja Schwarzin epäyhtälöstä saadaan arvio

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k(t, \mathbf{x}_1) - f_k(t, \mathbf{x}_2)| = \sum_{k=1}^{n} |\nabla f_k(t, \mathbf{s}_k) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} \|\nabla f_k(t, \mathbf{s}_k)\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} M_k\Big) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Lip-vakioksi $M = M_K$ kelpaa siten $M = \sum_{k=1}^{n} M_k$. $\square$

Theorem 5.3 (Lokaali OY-lause 1.kl. systeemeille)**.** *Olkoon $D \subset E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, jossa D on alue. Olkoon funktio $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ alueessa D jatkuva, ja toteuttakoon se siinä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan $\mathbf{x}$ osalta. Olkoon $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$.*

(a) Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että alkuarvotehtävällä (5.7-8)=(5.5-6),

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

on ratkaisu $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ välillä $I =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

(b) Olkoot $\mathbf{x}_k : I_k \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (5.7-8) ratkaisua, joiden kuvaajat kulkevat D:ssä, ts. $(t, \mathbf{x}_k(t)) \in D$ kaikilla $t \in I_k$, $k = 1, 2$. Tällöin

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \textit{kaikilla } t \in I_1 \cap I_2.$$

Proof. Lauseen 4.4 todistukseen ei tule oleellisia muutoksia. Ainoa hiukankin näkyvä ero on että Picardin approksimaatioiksi saadaan integroimalla jono vektoriarvoisia funktioita. Kyseisen jonon käsittelyssä on hyötyä seuraavasta integraalia koskevasta arviosta: Olkoon $a < b$. Tällöin

$$\Big\| \int_a^b \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big)\, dt \Big\| \le \int_a^b \big\| \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big) \big\|\, dt. \tag{5.9}$$

Kun soveltaa tätä, kaikki muu menee kuten ennenkin. □

Lauseiden 4.5-7 vastineet, Maksimaaliratkaisu, OY-lauseen globaali muoto ja Poistumislause, pätevät myös 1.kl. systeemeille. On ehkä jo tässä vaiheessa syytä huomauttaa, että lineaarinen 1.kl. systeemi toteuttaa OY-lauseen globaalin muodon ehdot, jos kerroinfunktiot ovat jatkuvia (kts. lemman 5.2 todistus). Asiaan palataan.

5.2 Korkeamman kertaluvun skalaariyhtälön palautus 1.kl. systeemiksi

Esimerkki 5.3. Lineaarinen 2.kl. DY

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

palautuu sijoituksella

$$z_1(x) = y(x) \quad \text{ja} \quad z_2(x) = y'(x)$$

kokoa 2×2 olevaksi lineaariseksi 1.kl. systeemiksi

$$\begin{aligned} &z_1'(x) = z_2(x) \\ &z_2'(x) = y''(x) = -py' - qy + r = -p(x)z_2(x) - q(x)z_1(x) + r(x). \end{aligned}$$

Kun vielä merkitään

$$\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},$$

saatu systeemi voidaan kirjoittaa matriisiesityksenä

$$\mathbf{z}'(x) = A(x)\mathbf{z}(x) + \mathbf{b}(x).$$

Yleisesti kertalukua n oleva (normaalimuotoinen) DY

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\big) \tag{5.10}$$

palautuu sijoituksella

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned} \tag{5.11}$$

yhtäpitäväksi, kokoa $n \times n$ olevaksi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= z_2(x) \\ z_2'(x) &= z_3(x) \\ &\vdots \\ z_{n-1}'(x) &= z_n(x) \\ z_n'(x) &= f\big(x, z_1(x), z_2(x), \cdots, z_n(x)\big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ennen kuin varsinaisesti jatketaan, palautetaan mieleen muutama matriisilaskennan sääntö: Reaalinen $m \times n$-matriisi A, merkitään $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on kerroinkaavio

$$A = \big(a_{ij}\big) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Jos $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (sama tyyppi) ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

$$A + B = \big(a_{ij} + b_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{ja} \quad \lambda A = \big(\lambda a_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Jos $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ja $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (joissa $p = A$:n sarakkeet $= B$:n rivit), ne voidaan kertoa järjestyksessä AB, ja saadaan $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\big(AB\big)(i, j) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Aina kun summat ja tulot on määritelty, pätevät laskulait

$$\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \quad \text{(osittelulaki)} \\ (B + C)A &= BA + CA \quad \text{(osittelulaki)} \\ A(BC) &= (AB)C \qquad \text{(liitäntälaki)} \\ \lambda AB &= (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad \text{(liitäntälaki)} \quad \text{ja} \\ AI &= IA = A, \end{aligned}$$

jossa

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

on identtinen neliömatriisi (matriisien ykkönen). Huomaa että tulon vaihdantalaki ei yleensä päde, vaan tavallisesti $AB \neq BA$.

Esimerkki 5.4. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = BA.$$

Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *säännöllinen* jos sillä on *käänteismatriisi* $A^{-1} \in R^{n\times n}$ joka toteuttaa yhtälön $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Luvussa 3 esitetyn lemman 3.6 yleistys pätee kaikille neliömatriiseille. Erityisesti matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen tasan silloin kun $\det A \neq 0$.

Jatketaan systeemiksi palauttamista. Jos skalaariyhtälö (5.10) on lineaarinen eli se on muotoa

$$y^{(n)} + a_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y' + a_1(x)y = b(x), \tag{5.13}$$

niin palautussysteemin (5.12) viimeinen yhtälö kuuluu (muut säilyvät)

$$z_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(x)z_k(x) + b(x).$$

Siten lineaarinen skalaariyhtälö palautuu lineaariseksi systeemiksi, ja tämä voidaan matriisimerkinnöin

$$\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1(x) & -a_2(x) & -a_3(x) & \cdots & -a_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

kirjoittaa tiiviissä muodossa (kuten tehtiin esimerkissä 5.3)

$$\mathbf{z}'(x) = A(x)\mathbf{z}(x) + \mathbf{b}(x). \tag{5.15}$$

Systeemiksi palauttamisen kautta, ensimmäisen kertaluvun systeemin lauseista (alaluku 5.1), saadaan vastaavat mielivaltaisen kertaluvun skalaaridifferentiaaliyhtälön OY-lauseet. Erityisesti lauseen 5.3 vastine - jota ei tässä kirjoiteta yksityiskohtaisesti - takaa normaalimuotoista yhtälöä (5.10) koskevalle AAT:lle lokaalin ratkaisun ja tämän yksikäsitteisyyden (globaalisti). Siinä riittää että nyt skalaariarvoinen $f(x, z_1, \cdots, z_n)$ toteuttaa lokaalin Lip-ehdon muuttujan $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ osalta (suora muunnos määritelmästä 5.1), ja tähän taas riittää jatkuvat osittaisderivaatat $\mathbf{z}$:n suhteen. Lisäksi alkuehdossa annetaan arvot $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)$, mikä vastaa palautussysteemin alkuehtoa (5.8), annettua arvoa $\mathbf{z}(x_0)$.

Koska lineaarinen yhtälö (5.13) palautuu lineaariseksi 1.kl. systeemiksi (5.15), ja tämä toteuttaa OY-lauseen globaalin muodon ehdot välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos kerroinfunktiot $A(x)$ ja $\mathbf{b}(x)$ ovat jatkuvia kyseisellä välillä (kts. lause 5.5), niin näissä olosuhteissa lineaarista yhtälöä (5.13) koskevalla AAT:llä on globaali, yksikäsitteisesti määrätty ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Kirjataan asia lauseeksi, joka samalla yleistää lauseen 3.3 kaikkiin kertalukuihin:

Theorem 5.4 (Lineaarisen skalaariDY:n OY-lause). *Olkoon I väli $\mathbb{R}$:ssä. Oletetaan että kerroinfunktiot $a_k(x)$, $k = 1, \cdots, n$, ja $b(x)$ ovat jatkuvia välillä I ja $x_0 \in I$. Olkoot $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ mielivaltaisia reaalilukuja. Tällöin lineaarisella AAT:llä*

$$Ly = y^{(n)} + a_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y' + a_1(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{5.16}$$

on koko välillä I ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Kaikki muut I:n osaväleillä annetut kyseisen AAT:n ratkaisut ovat tämän rajoittumia.

5.3 Lineaariset 1.kl. systeemit

Kokoa $n \times n$ oleva *lineaarinen 1.kl. systeemi* (EHS) on muotoa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{5.17}$$

jossa kerroinfunktiot ovat

$$A(t) = \big(a_{ij}(t)\big) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}. \tag{5.18}$$

Yleensä ne oletetaan jatkuviksi. Vastaava homogeenisysteemi (HS) on

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t). \tag{5.19}$$

Theorem 5.5 (Lineaarisen 1.kl. systeemin OY-lause). *Olkoon I väli $\mathbb{R}$:ssä. Oletetaan että kerroinfunktiot $A(t)$, eli $a_{ij}(t)$:t, ja $\mathbf{b}(t)$ ovat jatkuvia välillä I ja $t_0 \in I$. Olkoon $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Tällöin lineaarisella AAT:llä*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{5.20}$$

on koko välillä I ratkaisu $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$. Kaikki muut I:n osaväleillä annetut AAT:n (5.20) ratkaisut ovat tämän rajoittumia.

Proof. Olkoon $[a, b]$ kompakti väli I:ssä. Sovelletaan OY-lauseen globaalia muotoa, ja siihen riittää osoittaa että funktio $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ on suorakaiteessa $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ tasaisesti Lip-jatkuva muuttujan $\mathbf{x}$ suhteen. Olkoot $(t, \mathbf{x}_1)$ ja $(t, \mathbf{x}_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)\| = \big\|A(t)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\big\| \le \big\|A(t)\big\|\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|,$$

joten Lip-vakioksi kelpaa $M = \max_{t\in[a,b]}\big\|A(t)\big\| < \infty$, joka on olemassa jatkuvuuden perusteella. □

Lineaarinen 1.kl. systeemi määrittelee lineaarisen operaattorin L,

$$L\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} - A(t)\mathbf{x}. \tag{5.21}$$

Sitä käyttäen esimerkiksi HS (5.19) voidaan kirjoittaa $L\mathbf{x} = 0$. Olkoot $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ derivoituvia funktioita ja c_1, c_2 vakioita. Lyhyellä laskulla nähdään (matriisilla kertomisen säännöt) että operaattori L toteuttaa lineaarisuusehdon

$$L(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1L\mathbf{x}_1 + c_2L\mathbf{x}_2.$$

Siten pätee superpositioperiaate. Jos esimerkiksi $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ ovat HS:n (5.19) ratkaisuja, niin myös funktio $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ on sen ratkaisu. Ylipäätään pätevät vastaavat tulokset kuin alaluvuissa 3.1-2; kummassakin lineaarisuus jyllää.

Definition 5.6. Jono $\big(\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)\big)$ vektorifunktiota on homogeenisysteemin (5.19) *perusjärjestelmä* välillä I, jos

(1) funktiot $\mathbf{x}_k(t)$ ovat HS:n (5.19) ratkaisuja välillä I, $k = 1, \cdots, n$,

(2) jokainen sen ratkaisu $\mathbf{x}(t)$ välillä I voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t), \quad c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \cdots, n. \tag{5.22}$$

Vektoriarvoiset funktiot $\mathbf{x}_k(t)$ määrittelevät sarake sarakkeelta matriisifunktion

$$X(t) = \big[\mathbf{x}_1(t)\cdots\mathbf{x}_n(t)\big] = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Merkitään vielä $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$. Tällöin summa (5.22) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Perusjärjestelmäjonosta muodostettua matriisifunktiota $X(t)$ kutsutaan HS:n (5.19) *perusmatriisiksi* (pm.) kyseisellä välillä I.

Theorem 5.7. *Jos matriisifunktio $A(t)$ on jatkuva välillä $I \subset \mathbb{R}$, homogeenisysteemillä (5.19), $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, on perusjärjestelmä välillä I.*

Proof. Samoin kuin lause 3.5; nyt vain käytetään OY-lausetta 5.5. □

Definition 5.8. Vektoriarvoisten funktioiden $\mathbf{x}_k : I \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, \cdots, n$, *Wronskin determinantti* on funktio $W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) : I \to \mathbb{R}$,

$$W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) = \det X(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{5.23}$$

Esimerkki 5.5. Olkoot $\phi_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, 2.kl. homogeeniyhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

ratkaisuja. Luvussa kolme niiden Wronskin determinantiksi määriteltiin funktio

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix}.$$

Palautetaan skalaariyhtälö 1.kl. systeemiksi. Tästäkin tulee lineaarinen, peräti homogeeninen: Merkitään $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ja $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, jolloin saadaan yhtäpitävä systeemi (pari)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -p\dot{x} - qx = -p(t)x_2(t) - q(t)x_1(t) \end{aligned}$$

eli

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Tällä systeemillä on vastaavasti ratkaisut $\mathbf{x}_k(t) = \big(\phi_k(t), \dot{\phi}_k(t)\big)$, $k = 1, 2$, ja näiden Wronskin determinatti on määritelmän 5.8 mukaan

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2)(t).$$

Siispä nyt annettu Wronskin determinantin määritelmä tangeeraa luvussa kolme annetun määritelmän kanssa.

Theorem 5.9. *Olkoon matriisifunktio $A(t) : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ jatkuva välillä I, ja olkoot vektorifunktiot $\mathbf{x}_k : I \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, \cdots, n$, homogeenisysteemin (5.19), $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, ratkaisuja. Ne muodostavat kyseisen systeemin perusjärjestelmän välillä I tasan silloin, kun $W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $t_0 \in I$.*

Proof. Samoin kuin lause 3.8; nyt vain käytetään OY-lausetta 5.5 ja lemman 3.6 yleistystä $n \times n$-neliömatriiseihin. □

Corollary 5.10. *Samat oletukset kuin edellisessä lauseessa. Tällöin pätee joko*

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0 \ \textit{kaikilla}\ t \in I \quad (\textit{kun}\ (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)\ \textit{on pj.}) \\ \textit{tai}\ W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) = 0 \ \textit{kaikilla}\ t \in I \quad (\textit{kun}\ (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)\ \textit{ei ole pj.}). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Esimerkki 5.6. Osoitetaan että vektorifunktiot

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

muodostavat välillä $I = \mathbb{R}$ perusjärjestelmän HS:lle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensin ne on osoitettava ratkaisuiksi. Esimerkiksi

$$\dot{\mathbf{x}}_3(t) = -e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A\mathbf{x}_3(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_3(t).$$

Kaksi muuta funktiota nähdään ratkaisuiksi vastaavalla tavalla.

Lauseen 5.9 perusteella riittää laskea lopuksi Wronski vaikka pisteessä $t = 0$. Saadaan

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

5.4 Vakiokertoimiset 1.kl. homogeenisysteemit

Merkitään $\mathbb{R}^n$:n origoa $(0, 0, \cdots, 0)$ lyhyesti $\mathbf{0}$. Tulevia tarkasteluja on syytä verrata vakiokertoimisten 2.kl. homogeeniyhtälöiden käsittelyyn alaluvussa 3.3. Samankaltaisuus ei ole sattuma.

Esimerkki 5.7. Ratkaistaan seuraava vakiokertoiminen homogeenisysteemi eliminointikeinolla:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 4x(t) - 4z(t) && (1a) \\ \dot{y}(t) &= 4y(t) - 2z(t) && (1b) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 4z(t). && (1c) \end{aligned}$$

Derivoidaan (1a) ja korvataan derivaatat $\dot{y}$ ja $\dot{z}$ yhtälöiden (1b) ja (1c) mukaisesti. Saadaan

$$(1a) \Rightarrow \ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{z} = 4\dot{x} + 8x + 16y - 16z \Leftrightarrow \ddot{x} - 4\dot{x} - 8x = 16y - 16z, \qquad (2)$$

Toisen kerran. Saadaan

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} &= 16\dot{y} - 16\dot{z} = 62y - 32z + 32x + 64y - 64z \\ \Leftrightarrow x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} - 32x &= 128y - 96z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Systeemi (1) ratkaistaan sen kanssa yhtäpitävästä systeemistä (1a), (2), (3), johon on päädytty derivoimalla yhtälöä (1a)! Ratkaistaan ensin y ja z parista (1a), (2):

$$\begin{aligned} 4z &= -\dot{x} + 4x && (1a) \\ 16y - 16z &= \ddot{x} - 4\dot{x} - 8x. && (2) \end{aligned}$$

Saadaan

$$y = \frac{1}{16}(\ddot{x} - 8\dot{x} + 8x), \quad z = -\frac{1}{4}\dot{x} + x. \qquad (4)$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (3), jolloin x:lle saadaan 3.kl. vakiokertoiminen HY

$$\begin{aligned} &x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} - 32x = 8\ddot{x} - 64\dot{x} + 64x + 24\dot{x} - 96x \\ &\Leftrightarrow x^{(3)} - 12\ddot{x} + 32\dot{x} = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^3 - 12r^2 + 32r = r(r^2 - 12r + 32) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 4,\ r_3 = 8.$$

Siten (5):n yleinen ratkaisu on (huomaa, että $e^{r_1 t} \equiv 1$)

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{4t} + c_3 e^{8t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Funktiot y ja z saadaan sitten (4):stä:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 e^{4t} + \frac{1}{2}c_3 e^{8t}, \\ z(t) &= c_1 - c_3 e^{8t}. \end{aligned}$$

Siten systeemin (1) yleinen ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{8t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Systeemillä (1) on vakioratkaisu $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ (kuten kaikilla homogeenisysteemeillä), *tasapainotila*. Tarkastellaan hieman ratkaisujen dynamiikkaa. Kaikilla $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, joilla $c_2 \neq 0$ tai $c_3 \neq 0$, selvästi pätee

$$\|(x(t), y(t), z(t))\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \to \infty, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Siis ratkaisu loittonee $\mathbf{0}$:sta, vaikka olisikin alun perin lähellä. Sanotaan, että tasapainotila $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ on *epästabiili.*

Vakiokertoimisten homogeenisten systeemien järjestelmällinen ratkaisumenetelmä on *matriisikeino*. Siinä tarvitaan neliömatriisin ominaisarvoja ja ominaisvektoreita. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Silloin $\lambda \in \mathbb{R}$ (tai $\in \mathbb{C}$) on sen *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ (tai $\in \mathbb{C}^n$), $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, että

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \qquad (5.25)$$

Vektoria $\mathbf{u}$ kutsutaan ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi.* Ne kaikki (lisättynä $\mathbf{0}$:lla) muodostavat $\mathbb{R}^n$:n vektorialiavaruuden, nk. *ominaisavaruuden.* Tämä seuraa matriisilla kertomisen lineaarisuudesta.

Että (5.25) toteutuu vektorilla $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, on yhtäpitävää kunkin seuraavan kohdan kanssa:

(a) Matriisi $A - \lambda I$ ei määrittele lineaarista injektiota $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(b) Matriisi $A - \lambda I$ ei ole säännöllinen.

(c) $\det\big(A - \lambda I\big) = 0$.

Determinanttiehto (c) antaa λ:lle astetta n olevan polynomiyhtälön, mikä tarjoaa käytännön keinon laskea A:n ominaisarvot ja -vektorit. Siispä $n \times n$-matriisilla A on n ominaisarvoa kompleksiluvuissa, jos kyseisen yhtälön juurten kertaluku otetaan huomioon. Periaatteessa yhdenkään ei tarvitse olla reaalinen.

Esimerkki 5.8. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) - (-3) * 1 \\ &= -4 + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1. \end{aligned}$$

$\lambda = 1$: Silloin $\mathbf{u} \in R^2$ on vastaava ominaisvektori

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow u_1 - 3u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Siis yksiulotteinen ominaisavaruus.

$\lambda = -1$: Silloin ominaisvektorille saadaan yhtälö

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tarkastelun kohde on vakiokertoiminen homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \tag{5.26}$$

jossa $\mathbf{x}$ on siis haettu vektorifunktio ja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on annettu vakioinen kerroinmatriisi. Ratkaistaan yhtälö yritteellä (vrt. alaluku 3.3)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}, \tag{5.27}$$

jossa yleisimmillään $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, kumpikin vakioita. Tällöin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{u}$ ja

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t}\mathbf{u} = e^{\lambda t}A\mathbf{u} \quad \text{kaikilla } t \Leftrightarrow A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Johtopäätös: Funktio (5.27) on systeemin (5.26) ratkaisu tasan silloin kun λ on matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{u}$ on sitä vastaava ominaisvektori.

Definition 5.11. Vektorien $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ (tai $\in \mathbb{C}^n$), $k \leq n$, jono on *vapaa* eli vektorit ovat *lineaarisesti riippumattomat*, jos vektoriyhtälöllä

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \tag{5.28}$$

on vain triviaaliratkaisu $c_1 = \cdots = c_k = 0$.

Theorem 5.12. *Olkoot $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot, ja olkoot $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ vastaavia ominaisvektoreita. Oletetaan että ominaisarvot λ_k ja -vektorit $\mathbf{u}_k$ ovat reaalisia, ja vektorit lisäksi lineaarisesti riippumattomia . Tällöin*

$$\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n\right)$$

on homogeenisysteemin (5.26) perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Proof. Jo tiedetään että funktiot $e^{\lambda_k t}\mathbf{u}_k$, $k = 1, \cdots, n$, ovat systeemin (5.26) ratkaisuja. Riittää laskea niiden Wronskin determinantti. Koska

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ja oletuksen mukaan tällä yhtälöllä on vain triviaaliratkaisu, esiintyvä matriisi on säännöllinen, ja siten sen determinantti on $\neq 0$. Siten

$$W\big(e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n\big)(0) = \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Väite seuraa nyt lauseesta 5.9. □

Esimerkki 5.9. Ratkaistaan homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

jossa matriisi A on kuten esimerkissä (5.8). Ominaisarvoiksi ja vastaaviksi ominaisvektoreiksi saatiin $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{u}_1 = [3\ 1]^T$ ja $\mathbf{u}_2 = [1\ 1]^T$. Koska

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

vektorit $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Siten edellisen lauseen nojalla pari

$$\left(e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

on homogeenisysteemin pj. Stabiilisuudesta: tasapainotila $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili.

Aina ei edellinen lause tarjoa (5.26):n perusjärjestelmää, sillä matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ei tarvitse olla n:ää lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Esitetään asiasta pari aputulosta, mutta sitä ennen esimerkki.

Esimerkki 5.10. Lasketaan ominaisarvot ja -vektorit, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Ominaisvektorit:

$$\mathbf{0} = (A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ominaisavaruuden dimensio on yksi, ja siten ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Kuitenkin $n = 2$. Funktio $e^{2t}[1\ 1]^T$ on kyllä matriisia vastaavan systeemin (5.26) eräs ratkaisu.

Lemma 5.13. *Jos matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tai $\in \mathbb{C}$), $k \le n$, ovat erilliset, niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ (tai $\in \mathbb{C}^n$) ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Proof. Todistus induktiolla k:n suhteen. Jos $k = 1$, asia on sevä, sillä ominaisvektorina $\mathbf{u}_1 \ne \mathbf{0}$, ja siten $c_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = 0$. Oletetaan, että väite pätee jollakin $k < n$. Tarkastellaan siis indeksiä $k+1$ ja vektoriyhtälöä

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Koska $\mathbf{u}_i$:t ovat ominaisarvoihin λ_i liittyviä omimaisvektoreita, kertomalla yhtälö matriisilla A saadaan yhtälö

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i A\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i c_i \mathbf{u}_i.$$

Kertomalla edellinen luvulla $-\lambda_{k+1}$ ja laskemalla jälkimmäisen kanssa yhteen saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0},$$

joten induktio-oletuksen mukaan $(\lambda_i - \lambda_{k+1})c_i = 0$ kaikilla $1 \le i \le k$. Koska ominaisarvot ovat erilliset, ts. $\lambda_i \ne \lambda_{k+1}$ kaikilla $1 \le i \le k$, niin $c_i = 0$ kaikilla $1 \le i \le k$. Sijoitetaan nämä arvot ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan $c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} \Rightarrow c_{k+1} = 0$. Siten kyseisellä yhtälöllä on vain triviaaliratkaisu $c_1 = \cdots = c_{k+1} = 0$, ja induktiotodistus on valmis. □

Esimerkki 5.11. Ratkaistaan homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)+2(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Ominaisvektorit: $\lambda = 1$. Tällöin

$$0 = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_2 - u_3 & = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 & = 0 \\ (4u_1 - 4u_2 + 4u_3 & = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 & = -s \\ u_2 & = s \\ u_3 & = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = 2$. Tällöin

$$0 = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 + 2u_2 - u_3 & = 0 \\ (u_1 - 2u_2 + u_3 & = 0) \\ 4u_1 - 4u_2 + 3u_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 & = -2s \\ u_2 & = s \\ u_3 & = 4s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = 3$. Tällöin

$$0 = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 - u_3 & = 0 \\ u_1 - 3u_2 + u_3 & = 0 \\ (4u_1 - 4u_2 + 2u_3 & = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 & = -s \\ u_2 & = s \\ u_3 & = 4s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Siten lemman 5.13 ja lauseen 5.12 nojalla homogeenisysteemillä on pj.

$$\left(e^t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, e^{2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right).$$

Jos haluaa, voi riippumattomuuden tarkistaa laskemalla Wronskin:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tälläkin kertaa tasapainotila $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili.

Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *symmetrinen*, jos $A^T = A$.

Lemma 5.14. *Jos matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen, sen ominaisarvot ovat reaaliset ja sillä on n lineaarisesti riippumatonta, reaalista ominaisvektoria.*

Proof. Kurssi Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I. □

Esimerkki 5.12. Ratkaistaan homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Matriisi A on symmetrinen.

Ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$2\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 8 - 8 - 4(1-\lambda) \quad (\text{sij. } r = 1-\lambda) =$$

$$r^3 - 12r - 16 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -2, r_2 = 4, r_3 = -2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \text{ (kaksinkertainen)}, \lambda_2 = -3.$$

Ominaisvektorit: $\lambda = 3$. Tällöin

$$0 = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= -r+s \\ u_2 &= r \\ u_3 &= s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_2, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = -3$. Tällöin

$$0 = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 &= 0 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 &= 0 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + 2u_3 &= 0 \\ 3u_2 + 3u_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= -s \\ u_2 &= -s \\ u_3 &= s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = s\mathbf{u}_3, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Selvästi ominaisvektorit $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ja $\mathbf{u}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Siten lauseen 5.12 nojalla homogeenisysteemillä on pj.

$$\left(e^{3t}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, e^{-3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right).$$

Puututaan seuraavaksi kompleksisiin ominaisarvoihin, joita voi siis tulla vastaan epäsymmetrisen reaalimatriisin tapauksessa. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ja olkoot $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ sekä $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, sen kompleksisia ominaisarvoja. Tällöin

$$A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} \Leftrightarrow A\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}_1\bar{\mathbf{u}} \Leftrightarrow A\bar{\mathbf{u}} = \lambda_2\bar{\mathbf{u}}.$$

Siten ominaisarvojen liittolukuparia λ_1, λ_2 vastaa toisistaan konjugoidut ominaisvektorit $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ ja $\mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, joissa $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, sillä $\beta \neq 0$. Homogeenisysteemillä $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ on siten kompleksiarvoiset ratkaisut

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{a} + i\mathbf{b})\\
&= e^{\alpha t}\big((\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + i(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)\big),\\
\mathbf{w}_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)(\mathbf{a} - i\mathbf{b})\\
&= e^{\alpha t}\big((\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) - i(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)\big),
\end{aligned}$$

joista lineaarisuutta soveltaen saadaan reaaliratkaisut

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t)) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t),\\
\mathbf{x}_2(t) &= \frac{1}{2i}(\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t).
\end{aligned}\right. \tag{5.29}$$

Theorem 5.15. *Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, ja olkoot niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ sekä $\mathbf{u}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Tällöin homogeenisysteemillä (5.26), $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, on reaaliratkaisut (5.29). Olkoot lisäksi muiden ominaisarvojen ja -vektorien määrittelemät, keskenään riippumattomat ratkaisut $\mathbf{x}_k(t)$, $k \geq 3$. Tällöin vectorit $\mathbf{x}_k(0)$, $k \geq 1$, ovat lineaarisesti riippumattomia keskenään.*

Proof. Edellä jo selvisi että funktiot (5.29) ovat HS:n reaaliratkaisuja. Todistetaan vielä riippumattomuus. Tarkastellaan lineaarikombinaatiota

$$c_1\mathbf{x}_1(0) + c_2\mathbf{x}_2(0) + \sum_{k\geq 3} c_k\mathbf{x}_k(0) = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)\mathbf{w}_1(0) + \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)\mathbf{w}_2(0) + \sum_{k\geq 3} c_k\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{0}.$$

Lemman 5.13 nojalla saadaan $c_1 - ic_2 = c_1 + ic_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ (jos useampi $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{u}_k$, $k \geq 3$, vastaa samaa ominaisarvoa, niiden lineaarikombinaatio liittyy kyseiseen ominaisarvoon ja on siten nolla). Vastaavasti $c_k = 0$ kaikilla $k \geq 3$. □

Esimerkki 5.13. Ratkaistaan homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}-1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i \in \mathbb{C}.$$

Siis edellä käytetyin merkinnöin $\alpha = -2$ ja $\beta = 1 \neq 0$. Ominaisvektorit: Valitaan $\lambda = -2+i$, jolloin

$$\mathbf{0} = (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)u_1 + 2u_2 & = 0 \\ u_1 + (1+i)u_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1-i)u_1 + 2u_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 & = -(1+i)s \\ u_2 & = s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Siis $\mathbf{a} = [-1\ 1]^T$ ja $\mathbf{b} = [1\ 0]^T$. Lauseen 5.15 mukaan HS:llä on ratkaisut

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t}\left(\cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}\left(\sin t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

ja vektorit $\mathbf{x}_1(0)$ sekä $\mathbf{x}_2(0)$ ovat lisäksi lineaarisesti riippumattomia. Siten

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1(0) & \mathbf{x}_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Lauseen 5.9 perusteella funktiopari $\big(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\big)$ on HS:n pj.

Lukija on varmaan tullut huomanneeksi että edellä esitetty matriisikeino jää hieman vajaaksi epäsymmetrisissä matriiseissa: niissä ominaisarvoista ja -vektoreista ei aina saada aikaiseksi homogeenisysteemin (5.26) perusjärjestelmää. Kyseistä keinoa voidaan kuitenkin kehittää, ja osoittautuu että haluttu perusjärjestelmä syntyy aina ominaisarvoista ja nk. *yleistetyistä ominaisvektoreista*; vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ on tällainen, matriisiin A ja sen ominaisarvoon λ liittyvä, jos jollakin kokonaisluvulla $k \geq 1$ pätee $(A-\lambda I)^k \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Erityisesti ominaisvektorit ovat myös yleistettyjä ominaisvektoreita (joilla $k = 1$). Kyseisen teorian kehittelyssä on jotain matematiikalle tyypillistä, ja niin opettavaista että perusideat ansaitsevat tulla lyhyesti esitellyiksi.

Ajatellaanpa systeemin (5.26) skalaarivastinetta, yhtälöä $\dot{x}(t) = ax(t)$, jossa $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Tämän DY:n yleinen ratkaisuhan on $x(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$. Olisiko systeemin (5.26) yleinen ratkaisu vastaavasti $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, siis e^{At} systeemin perusmatriisi? Ja mitä tällä matriisipotenssilla tarkoitetaan? No onhan se kun potenssi määritellään sopivasti. Eksponenttifunktion e^{at} Taylorin kehitelmä on $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} (at)^k/k!$. Siis määritellään

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{5.30}$$

Sarja suppenee kaikilla $t \in \mathbb{R}$ $n \times n$-matriisien avaruudessa, joka on varustettu (jollain) matriisinormilla (kurssi Topologia I tai Funktioanalyysi I). Erityisesti $e^{A0} = I$. Nopeasti nähdään että

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At},$$

siis matriisifunktio e^{At} toteuttaa matriisidifferentiaaliyhälön $\dot{X}(t) = AX$, mikä merkitsee että sarakkeet toteuttavat systeemin (5.26). Lisäksi sarakkeiden Wronski nollassa on $\det I = 1 \neq 0$, joten lauseen 5.9 perusteella (5.30) on todella systeemin (5.26) pm. Äärettömänä summana se ei ole kuitenkaan tälle kovin käytännöllinen esitys.

Helposti nähdään (sarjojen kertominen) että

$$e^{At} = e^{\lambda It} e^{(A-\lambda I)t} = e^{\lambda t} I e^{(A-\lambda I)t} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}.$$

Olkoon λ luku ja $\mathbf{u}$ vektori. Tällöin, koska e^{At} on pm., vektorifunktio

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{u} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}\mathbf{u} = e^{\lambda t}\Big(\mathbf{u} + t(A-\lambda I)\mathbf{u} + \cdots + \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} + \cdots\Big)$$

on systeemin (5.26) ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$.

Olkoon matriisin A karakteristinen polynomi

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

jossa λ_i:t ovat eri ominaisarvot ja m_i:t näiden kertaluvut, $n = m_1 + \cdots + m_j$. Voidaan osoittaa että ominaisarvoon λ_i liittyy m_i lineaarisesti riippumatonta yleistettyä ominaisvektoria, ja että myös koko n:n yleistetyn ominaisvektorin joukko on vapaa. Lisäksi, jos $\mathbf{u}$ liittyy omimaisarvoon λ_i, niin

$$\big(A - \lambda_i I\big)^{m_i}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{5.31}$$

Siis n lineaarisesti riippumatonta yleistettyä ominaisvektoria saadaan yhtälöistä (5.31), $i = 1, \cdots, j$, ja vastaavat vektorifunktiot, äärelliset summat

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{u} = e^{\lambda_i t}\Big(\mathbf{u} + t(A-\lambda I)\mathbf{u} + \cdots + \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}(A-\lambda I)^{m_i-1}\mathbf{u}\Big) \tag{5.32}$$

muodostavat lauseen 5.9 nojalla perusjärjestelmän homogeenisysteemille (5.26), kaikissa matriisitapauksissa. Lisää tietoa asiasta löytyy esimerkiksi kirjasta Nagle, Saff, Snider: Fundamentals of Differential Equations. On myös syytä muistaa että systeemi (5.26) on aina yhtäpitävä erään n.kl. vakiokertoimisen homogeeniyhtälön kanssa (eliminointi).

5.5 Epähomogeeniset lineaariset 1.kl. systeemit

Luvun lopuksi tutkitaan lineaarista epähomogeenisysteemiä (EHS)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \tag{5.33}$$

jossa funktiot $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ ovat annettuja. Vastaava HS on $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$. Siis kyse on uudestaan systeemeistä (5.17) ja (5.19).

Theorem 5.16. *Olkoon $\mathbf{x}_p(t)$ EHS:n (5.33) yksittäiratkaisu, ja olkoon vastaavan HS:n perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t))$. Tällöin EHS:n (5.33) yleinen ratkaisu on*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{x}_k(t), \quad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}, \tag{5.34}$$

siis EHS:n yksittäsratkaisu+HS:n yleinen ratkaisu. Itse asiassa saadaan kaikki ratkaisut.

Proof. Samoin kuin lause 1.11 luvussa 1. □

Etsitään variointikeinolla EHS:lle (5.33) yksittäisratkaisu. Oletetaan että tunnetaan vastaavan HS:n $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ perusmatriisi

$$X(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t) \cdots \mathbf{x}_n(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

jossa siis sarakkeet $\mathbf{x}_k(t)$ muodostavat pj:n HS:lle, ja siten tämän yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{x}_k(t) = X(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Korvataan vakiot c_k derivoituvilla funktioilla $c_k(t)$, $k = 1, \cdots, n$, ja muodostetaan näistä vektorifunktio $\mathbf{c}(t) = \big(c_1(t), \cdots, c_n(t)\big)$, jolloin saadaan yrite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \mathbf{x}_k(t) = X(t)\mathbf{c}(t). \tag{5.35}$$

On helppo laskea auki, ja todeta että seuraava tuiki tavallinen derivoinnin tulosääntö pätee myös matriisi- ja vektorifunktioille:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t).$$

Toisaalta perusmatriisi toteuttaa matriisififferentiaaliyhtälön

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

koska tämä pätee sarakkeittain. Siten kun yrite (5.35) sijoitetaan, saadaan

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A(t)X(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \\ &A(t)X(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A(t)X(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t). \end{aligned}$$

Lauseen 5.10 mukaan kaikissa tarkasteluvälin pisteissä pätee

$$\det X(t) = W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0,$$

joten jokaisessa pisteessä t on olemassa matriisin $X(t)$ käänteismatriisi $X(t)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi matriisifunktio $t \mapsto X(t)^{-1}$ on jatkuva, koska $X(t)$ on sitä, samoin oletuksen mukaan $\mathbf{f}(t)$. Saadaan

$$X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{c}}(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \mathbf{c}(t) = \int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\, dt,$$

jossa integraali on todella olemassa jatkuvuuden perusteella. On saatu yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\, dt, \tag{5.36}$$

ja siten lauseen 5.16 nojalla EHS:n (5.33) yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + X(t)\mathbf{c}, \quad \text{(vakio) } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

Ratkaisu näyttää helpolta, mutta käänteismatriisin $X(t)^{-1}$ laskeminen voi olla työlästä, samoin integrointi. Käytännössä yksittäisratkaisu on helpompi etsiä sopivalla suoralla yritteellä, varsinkin kun systeemi on vakiokertoiminen, ts. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on vakiomatriisi. Tarkastellaan asiaa muutaman esimerkin valossa.

Esimerkki 5.14. Ratkaistaan EHS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = t\mathbf{g} = t\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan vastaava HS $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ensin. Se on jo ratkaistu esimerkissä 5.12, ja sen yleiseksi ratkaisuksi saatiin

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

EHS:n yksittäisratkaisu: Koska $\mathbf{f}(t)$ koostuu ensimmäisen asteen polynomeista, sopiva suoran yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3,$$

jolloin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}$, $A\mathbf{x}(t) = tA\mathbf{a} + A\mathbf{b}$, ja saadaan (lineaarinen 6×6-yhtälöryhmä)

$$\mathbf{a} = tA\mathbf{a} + A\mathbf{b} + t\mathbf{g} \quad \text{kaikilla } t \Leftrightarrow A\mathbf{a} = -\mathbf{g},\ A\mathbf{b} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siten epähomogeenisysteemillä on yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = t\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ja sen yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$.

Esimerkki 5.15. Muuten sama kuin edellinen, mutta

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lineaarisuuden vuoksi sopiva yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\sin t + \mathbf{d}\cos t, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3.$$

Vastaavasti, jos

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sopiva yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t^2\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} + e^t\mathbf{d} + e^{-t}\mathbf{h}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3.$$

Esimerkki 5.16. Ratkaistaan seuraava systeemi varioimiskeinolla:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan ensin vastaava HS $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$$

Vastaaviksi ominaisvektoreiksi saadaan $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1]^T$ ja $\mathbf{u}_2 = [1 \ 2]^T \in \mathbb{R}^2$. Siten HS:n perusmatriisi ja tämän käänteismatriisi ovat

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad X(t)^{-1} = \frac{1}{\det X} \begin{bmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix},$$

missä on sovellettu muistamisen arvoista säännöllisen 2×2-matriisin kääntösääntöä

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Siten

$$\int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int 2\,dt \\ -\int e^{-t}\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

ja EHS:llä on siis yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = 2te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

EHS:n yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = 2te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Huom. Suora yrite $\mathbf{x}(t) = e^t\mathbf{a}$, jossa $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, ei olisi toiminut. Syy: HS:llä on muotoa $e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 = e^t[1 \ 1]^T$ oleva ratkaisu.

6 Autonomiset systeemit tasossa

6.1 Kriittinen piste, stabiilisuus ja lineaarinen tapaus

Autonomisuuteen ja sen ilmiöihin on törmätty aikoinaan jo yhden (skalaarisen) differentiaaliyhtälön tapauksessa: esimerkiksi logistinen yhtälö on sellainen (luku kaksi). Jo ratkaisematta yhtälöä voitiin päätellä ratkaisujen käyttäytymisestä yhtä ja toista, usein esimerkiksi raja-arvo kun aika (vapaa muuttuja) menee äärettömään. Systeemeissäkin autonomisuus edesauttaa tuollaista laadullista ratkaisujen dynamiikan tutkimista, so. tutkimista ilman käsillä olevaa ratkaisua. Tämähän on usein tavoittamattomissa.

Tuntemattomat reaalifunktiot olkoot $x(t)$ ja $y(t)$. Riippukoot annetut funktiot f ja g vain x:stä ja y:stä, ei vapaasta muuttujasta t: $f = f(x, y)$ ja $g = g(x, y)$. *Autonomisen systeemin* (AS) normaalimuoto tasossa on pari

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Siten koko systeemissä ei esiinny eksplisiittisesti vapaata muuttujaa t (mikä yleisestikin tekee systeemistä autonomisen).

Olkoon $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ systeemin (6.1) ratkaisu välillä $I \subset \mathbb{R}$. Usein xy-tasoa kutsutaan *faasiavaruudeksi* ja siihen piirtyvää pistejoukkoa $\{\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in I\}$ ratkaisun $\mathbf{z}(t)$ *radaksi* (trajectory); on tärkeää erottaa rata ratkaisun kuvaajasta, graafista joka kulkee $\mathbb{R}^3$:ssa. Radalle saadaan välittömästi skalaarinen 1.kl. DY

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \tag{6.2}$$

sillä aina kun $\dot{x}(t) \neq 0$, niin on olemassa (ainakin paikallinen) käänteisfunktio $t(x)$, ja $t'(x) = 1/\dot{x}(t)$. Siten $y(x) = y(t(x))$ ja $y'(x) = \dot{y}(t)t'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$. Jos yhtälön (6.2) implisiittiratkaisu on $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, ts. radat saadaan F:stä tasa-arvokäyrinä, funktio F on AS:n (6.1) *ensimmäinen integraali*. Sillä on monasti selvä tulkinta, esimerkiksi fysiikassa konservatiivisen systeemin kokonaisenergia F säilyy jne.

Tavallinen tavoite on kuvata AS:n ratkaisujen käyttäytymistä kun $t \to \pm\infty$, etenkin kun lähdetään liikkeelle tiettyjen pisteiden läheisyydestä.

Definition 6.1. Piste $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on autonomisen systeemin (6.1) *kriittinen piste* (critical point), jos $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Niiden joukko on AS:n *kriittinen joukko*. Kriittistä pistettä (x_0, y_0) vastaa AS:n vakioratkaisu $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ ja kääntäen. Tätä vakioratkaisua kutsutaan AS:n *tasapainotilaksi* (tai tasapainoratkaisuksi, equilibrium solution).

Kriittinen piste $\mathbf{z}_0$ (tasapainotila) on *stabiili*, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että systeemin ratkaisulle $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ pätee

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0\| = \big((x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\big)^{1/2} < \epsilon \quad \text{kaikilla } t \geq 0 \text{ (ja on olemassa)} \tag{6.3}$$

aina kun $\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{z}_0\| < \delta$ (siis ratkaisu elää äärettömiin ja pysyy lähellä, jos alkuarvo on lähellä). Muussa tapauksessa kriittinen piste $\mathbf{z}_0$ (tasapainotila) on *epästabiili*.

Jos kriittinen piste $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ on stabiili, ja lisäksi on olemassa sellainen $\eta > 0$, että ratkaisulle $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ pätee

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \text{ ja } \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 \tag{6.4}$$

aina kun $\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{z}_0\| < \eta$, niin $\mathbf{z}_0$ on *asymptoottisesti stabiili.*

Huom. Edellä määritelty stabiilisuus on täysin lokaali käsite.

Olkoon $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ AS:n (6.1) kriittinen piste. Silloin muunnoksella

$$u(t) = x(t) - x_0 \quad \text{ja} \quad v(t) = y(t) - y_0 \tag{6.5}$$

päästään tilanteeseen, jossa

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} = f(x,y) = f(u + x_0, v + y_0) = \tilde{f}(u,v) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x,y) = g(u + x_0, v + y_0) = \tilde{g}(u,v) \end{aligned}, \tag{6.6}$$

ja $\tilde{f}(0,0) = \tilde{g}(0,0) = 0$. Muunnos siis siirtää kriittisen pisteen origoon, ja selvästikin kriittisen pisteen laatu säilyy muunnoksessa. Siten riittää tutkia systeemiä (6.1), jossa $f(0,0) = g(0,0) = 0$, ja sen kriittistä pistettä $\mathbf{0} = (0,0)$.

Lineaarisen autonomisen systeemin yleinen muoto tasossa on

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}, \tag{6.7}$$

jossa $\mathbf{z} = [x\ y]^T$ ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

ovat vakioita. Muunnoksella (6.5) päästään homogeenisysteemiin

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t), \tag{6.9}$$

jossa erityisesti matriisi säilyy samana (ja tarkasteltavana on kriittinen piste $\mathbf{0}$, ja kriittisen pisteen laatu säilyy). Jos $\det A \neq 0$, systeemillä (6.7) on tasan yksi kriittinen piste. Jos $\det A = 0$, niitä on ∞-monta tai ei yhtään.

Esimerkki 6.1. Tarkastellaan lineaarista autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5x(t) + 2y(t) + 1 \\ \dot{y}(t) &= x(t) - 4y(t) + 7. \end{aligned}$$

Kriittinen piste on $(x_0, y_0) = (1, 2)$ (saadaan yhtälöparista $-5x + 2y + 1 = x - 4y + 7 = 0$). Sen laadun selvittämiseksi riittää tutkia $\mathbf{0}$:a vastaavassa homogeenisysteemissä. Matriisi on siis

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sen ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -6.$$

Lasketaan hieman turhaan myös ominaisvektorit: $\lambda = -3$,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Kun $\lambda = -6$, saadaan vastaavasti $\mathbf{u} = s[-2\ 1]^T$. Siten alkuperäisen EHS:n yleinen ratkaisu on (kriittinen piste antaa sen yksittäisratkaisun)

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ kun } t \to \infty.$$

Kriittinen piste $(1, 2)$ on siis asymptoottisesti stabiili, mikä olisi nähty yhtä hyvin siitä että $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili vastaavassa HS:ssä. Matriisin A ominaisarvojen etumerkit ratkaisevat!

Radat saadaan helpoimmin eliminoimalla yleisestä ratkaisusta t pois (nyt kun systeemi on osattu ratkaista). Merkitään $s = e^{-3t}$. Yleisestä ratkaisusta saadaan

$$\begin{aligned} & x = c_1 s - 2c_2 s^2 + 1,\ y = c_1 s + c_2 s^2 + 2 \Rightarrow c_1 s = (1/3)(x + 2y - 5), \\ & s^2 = (1/9c_1^2)(x + 2y - 5)^2,\ y = (1/3)(x + 2y - 5) + (c_2/9c_1^2)(x + 2y - 5)^2 \\ & \quad \Leftrightarrow -x + y - 1 = c(x + 2y - 5)^2,\ c = c_2/3c_1^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.2. Selvitetään kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ laatu homogeenisessa parissa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x - 3y \\ \dot{y} &= 4x - 3y. \end{aligned}$$

Matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sen ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1.$$

Yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t}\mathbf{a} + c_2 e^{-t}\mathbf{b}, \quad \text{joillakin } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Siis $\|\mathbf{z}(t)\| \to \infty$, kun $t \to \infty$ ja $c_1 \neq 0$. Siten $\mathbf{0}$ on epästabiili (nk. *satulapiste*).

Esimerkki 6.3. Kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ laatu homogeenisessa parissa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= 4x - 3y. \end{aligned}$$

Matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sen ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Ominaisarvon kertaluku on kaksi. Ominaisvektorit:

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Systeemillä on ratkaisu $\mathbf{z}_1(t) = e^{-t}[1\ 2]^T$. Yleistettyjen ominaisvektorien avulla saadaan toinen, riippumaton ratkaisu

$$\mathbf{z}_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Funktiopari $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on todella HS:n pj., sillä

$$W(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Siispä aina pätee $\|\mathbf{z}(t)\| \to \mathbf{0}$, kun $t \to \infty$; ominaisarvon merkki ratkaisee. Siten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Esimerkki 6.4. Tarkastellaan homogeenista autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4x \end{aligned}$$

ja sen kriittistä pistettä $\mathbf{0}$. Matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Siten $\alpha = 0$ ja $\beta = 2$. Ominaisvektorit (taas hiukan turhaan): $\lambda = 2i$,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -2iu_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = s\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Siten $\mathbf{a} = [0\ 2]^T$ ja $\mathbf{b} = [-1\ 0]^T$, ja HS:llä on pj.

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

ja yleinen ratkaisu kuuluu $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{z}_1(t) + c_2\mathbf{z}_2(t)$.

Alkuehto $x(0) = x_0$ ja $y(0) = y_0$ antaa $c_1 = (1/2)y_0$ ja $c_2 = -x_0$. Siten pätee

$$\|\mathbf{z}(t)\| \le |c_1|\|\mathbf{z}_1\| + |c_2|\|\mathbf{z}_2\| \le (|c_1| + |c_2|)\left(\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|\right) = 3\big((1/2)|y_0| + |x_0|\big).$$

Siis $\|\mathbf{z}(t)\|$ pysyy pienenä, jos $\|\mathbf{z}(0)\|$ on pieni, ja siten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on stabiili (muttei asymptoottisesti stabiili).

Esimerkkien valossa on käynyt selväksi seuraava perustulos:

Theorem 6.2 (Lineaarisen autonomisen systeemin stabiilisuus)**.** *Lineaarisen autonomisen systeemin (6.9),*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z} = (x, y), \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ *laatu määräytyy matriisin* A *ominaisarvoista seuraavasti:*

ominaisarvot	**kriittisen pisteen 0 laatu**
positiiviset	*epastabiili*
negatiiviset	*asymptoottisesti stabiili*
erimerkkiset	*epastabiili (nk. satulapiste)*
nolla ja positiivinen	*epastabiili*
nolla ja negatiivinen	*stabiili*
kompleksiset ominaisarvot :	
reaaliosa positiivinen	*epastabiili*
reaaliosa negatiivinen	*asymptoottisesti stabiili*
reaaliosa nolla	*stabiili (keskus).*

Jos lisäksi $\det A \neq 0$*, niin* $\mathbf{0}$ *on systeemin (6.9) ainoa kriittinen piste. Jos* $\det A = 0$*, kriittisiä pisteitä on* ∞*-monta, ja niiden laatu on sama kuin kriittisen pisteen* $\mathbf{0}$ *eli saadaan yllä olevasta taulukosta.*

6.2 Epälineaariset autonomiset systeemit tasossa

Tutkitaan seuraavaksi 1.kl. autonomista paria (6.1),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)), \end{aligned}$$

erityisesti kun se ei ole lineaarinen. Aluksi muutama autonomisuuteen liittyvä lause:

Theorem 6.3. *Jos* $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ *on parin (6.1) ratkaisu välillä* I*, ja* $a \in \mathbb{R}$ *on mielivaltainen vakio, niin myös funktio* $\mathbf{z}_a : I - a \to \mathbb{R}^2$*,*

$$\mathbf{z}_a(t) = \mathbf{z}(t + a), \quad t \in I - a, \tag{6.10}$$

on parin (6.1) ratkaisu.

Proof.

$$\dot{x}_a(t) = \dot{x}(t+a) = f\big(x(t+a), y(t+a)\big) = f\big(x_a(t), y_a(t)\big) \quad \text{kaikilla } t \in I - a.$$

Vastaavasti $\dot{y}_a(t) = g\big(x_a(t), y_a(t)\big)$. □

Lause 6.3 kertoo että autonominen systeemi on siirtoinvariantti ajan suhteen.

Theorem 6.4. *Olkoot parin (6.1) määrittelevät funktiot f ja g jatkuvia, ja olkoon parilla ratkaisu $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ välillä $[a, \infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Jos on olemassa raja-arvo*

$$\mathbf{z}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = \big(\lim_{t\to\infty} x(t), \lim_{t\to\infty} y(t)\big) = \big(x_\infty,\, y_\infty\big) \in \mathbb{R}^2, \tag{6.11}$$

niin $\mathbf{z}_\infty = \big(x_\infty,\, y_\infty\big)$ on parin (6.1) kriittinen piste.

Proof. Koska f ja g ovat jatkuvia, on olemassa

$$\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = f\big(x_\infty,\, y_\infty\big) \quad \text{ja} \quad \dot{y}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = g\big(x_\infty,\, y_\infty\big).$$

Lemman 2.1 mukaan $\dot{x}_\infty = \dot{y}_\infty = 0$. Siten $f\big(x_\infty,\, y_\infty\big) = g\big(x_\infty,\, y_\infty\big) = 0$. □

Esimerkki 6.5. Tarkastellaan epälineaarista autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(y-2) \\ \dot{y}(t) &= (x-2)(y-2) \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} -y(y-2) & = 0 \\ (x-2)(y-2) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = s \in \mathbb{R} \\ y & = 2 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 0. \end{cases}$$

Radan yhtälö (6.2) saa muodon

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x-2}{-y},$$

joka separoituvana on helppo ratkaista. Saadaan ympyröitä $y^2 + (x-2)^2 = c$ keskipisteenä kriittinen piste $(2, 0)$. On syytä muistaa ettei funktioita $x(t)$ ja $y(t)$, siis "varsinaista ratkaisua", ole tällä ratkaistu. Seuraavien seikkojen osoittaminen käy hyvästä (vaativahkosta) harjoituksesta:

1) Esimerkin systeemin ratkaisut ovat olemassa koko $\mathbb{R}$:ssä. Ohje: Poistumislause.

2) Kun $0 < c < 4$, ratkaisut ovat jaksollisia. Ohje: Napakoordinaattien kulma $\theta(t)$. Koska rata ei sisällä kriittisiä pisteitä, niin $\dot{\theta}(t) \neq 0$ kaikilla t. Siis $\dot{\theta}(t)$ on yhdenmerkkinen (< 0), ja siten $\theta(t)$ on aidosti monotoninen eikä ole lauseen 6.4 perusteella rajoitettu funktio. Siten jollakin $a > 0$ pätee $\mathbf{z}(a) = \mathbf{z}(0)$. Lauseen 6.3 mukaan myös $\mathbf{z}(t+a)$ on systeemin ratkaisu. Koska tämä ja $\mathbf{z}(t)$ toteuttavat saman alkuehdon, OY-lauseen 5.3 perusteella $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t+a)$ kaikilla t.

3) Kun $c \geq 4$ ja $y(0) \neq 2$, niin $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = 2 - \sqrt{c-4}$ ja $y_\infty = 2$. Siis ratkaisu lähestyy kriittistä pistettä. Ohje: Muuten sama logiikka kuin kohdassa 2, mutta funktio $\theta(t)$ on radalla olevan kriittisen pisteen vuoksi rajoitettu. Siten raja-arvot θ_∞, x_∞ ja y_∞

ovat olemassa. Lopuksi sovelletaan lausetta 6.4 ja virtaussuuntia (seuraava virtauskuvio, direction field).

Kuva 8

Havaitaan että kriittinen piste $(2, 0)$ on stabiili (keskus), ja että kriittiset pisteet $(x, 2)$ ovat stabiileja kun $x < 2$, mutta epästabiileja kun $x \geq 2$.

Oletetaan että origo $\mathbf{0}$ on parin (6.1) kriittinen piste, ja funktiot $f(x, y)$ sekä $g(x, y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia jossain sen ympäristössä. Tällöin kyseisen parin *linearisointi* origossa on vakiokertoiminen homogeenipari (siis autonominen)

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t),$$

jossa

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{6.12}$$

Siis A on kuvauksen $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derivaatta(matriisi) pisteessä $\mathbf{z} = (x, y) = \mathbf{0}$.

Otetaan apukeinoja lineaarialgebrasta: Matriisi $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ määrittelee neliömuodon $N = N_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$N(\mathbf{z}) = N(x, y) = \mathbf{z}^T B\mathbf{z} = [x\ y]B[x\ y]^T, \quad \mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Matriisi B on positiivisesti (negatiivisesti) definiitti, jos $N(\mathbf{z}) > 0$ ($N(\mathbf{z}) < 0$) kaikilla $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Symmetrisen ja positiivisesti definiitin matriisin B tapauksessa N_B määrittelee (elliptisen) normin $\mathbb{R}^2$:ssa yhtälöllä

$$\|\mathbf{z}\|_B^2 = N(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2. \tag{6.13}$$

Se on ekvivalentti tavallisen Euklidisen normin kanssa: löytyy vakiot $0 < \alpha \leq \beta$, joilla

$$\alpha\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{z}\|_B \leq \beta\|\mathbf{z}\| \quad \text{kaikilla } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2.$$

Erityisesti suppeneminen toteutuu kummassakin normissa tasan samoissa tapauksissa.

Lemma 6.5. *Jos matriisin $A \in \mathbb{R}^2$ ominaisarvot ovat erit ja negatiiviset (positiiviset), on olemassa sellainen symmetrinen, posiitisesti definiitti matriisi $B \in \mathbb{R}^2$, että matriisi BA on negatiivisesti (positiivisesti) definiitti.*

Proof. Olkoot $A\mathbf{u} = -\lambda_1\mathbf{u}$, $A\mathbf{w} = -\lambda_2\mathbf{w}$, jossa $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ja $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$. Merkitään $\mathbf{v} = (-u_2, u_1)$, jolloin $\|\mathbf{v}\| = 1$ ja

$$\mathbf{w} = \cos\theta\,\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v} \quad \text{jollakin } \theta \in \mathbb{R}.$$

Koska $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ovat lemman 5.13 mukaan lineaarisesti riippumattomia, niin $\sin\theta \neq 0$.

Määritellään jokaista $r > 0$ kohti symmetrinen matriisi

$$B = B_r = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Silloin $B\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ja $B\mathbf{v} = r\mathbf{v}$, ja lisäksi B on positiivisesti definiitti matriisi, sillä

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow N_B(\mathbf{z}) = (c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}) \cdot (c_1\mathbf{u} + rc_2\mathbf{v}) = c_1^2 + rc_2^2. \tag{6.14}$$

Tarkastellaan matriisia BA ja sen määrittelemän neliömuodon arvoja pisteissä $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tyyppiä $\mathbf{z} = c\,\mathbf{u}$ olevat pisteet toteuttavat vaatimuksemme heti: silloin $\mathbf{z}^T BA\mathbf{z} = -\lambda_1 c^2 < 0$. Koska muoto on neliöllinen, loput voidaan tavoitetta ajatellen normittaa muotoon

$$\mathbf{z} = c\,\mathbf{u} + \mathbf{w} = (c + \cos\theta)\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Näillä pisteille pätee

$$A\mathbf{z} = -\lambda_1 c\,\mathbf{u} - \lambda_2\mathbf{w} = -(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - \lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} &\mathbf{z}^T BA\mathbf{z} = \mathbf{z}^T B\big(-(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - \lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}\big) = \big((c + \cos\theta)\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v}\big)\cdot \\ &\big(-(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - r\lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}\big) = -(c + \cos\theta)(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta) - r\lambda_2\sin^2\theta \\ &= p(c) - r\lambda_2\sin^2\theta, \end{aligned}$$

jossa $p(c)$ on toisen asteen polynomi. Sen globaali maksimi on

$$\max_{c\in\mathbb{R}} p(c) = p\Big(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1}\cos\theta\Big) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1}\cos^2\theta.$$

Valitaan sellainen $r > 0$ että (huomaa että $\sin\theta \neq 0$)

$$\max_{c\in\mathbb{R}} p(c) - r\lambda_2\sin^2\theta < 0 \Leftrightarrow r > \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.$$

Silloin $\mathbf{z}^T BA\mathbf{z} < 0$ kaikilla $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. □

Huom. Lemman oletuksilla A on negatiivisesti (positiivisesti) definiitti tasan silloin kun

$$\frac{4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} > \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

erityisesti symmetrisen matriisin tapauksessa aina, sillä silloin $\cos\theta = 0$ (ominaisvektorit ovat silloin kohtisuorassa).

Theorem 6.6 (Poincarén stabiilisuuslause)**.** *Oletetaan että autonomisessa systeemissä (6.1) origo* $\mathbf{0}$ *on kriittinen piste, ja funktiot* $f(x,y)$ *sekä* $g(x,y)$ *ovat jatkuvasti derivoituvia jossain sen ympäristössä. Olkoot* λ_1 *ja* λ_2 *systeemin origossa linearisoinnin matriisin* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *ominaisarvot. Oletetaan vielä että* $\det A \neq 0$*. Tällöin kyseisessä systeemissä kriittisen pisteen* $\mathbf{0}$ *laatu on sama kuin linearisoinnissa poikkeuksena yksi tapaus: jos* λ_1 *ja* λ_2 *ovat puhtaasti imaginaarisia, laatua ei voi päätellä linearisoinnista.*

Proof. Viitteenä kirja D.W. Jordan and P. Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1987, Chapter 10.

Kuitenkin malliksi todistaan tapauksista se, jossa λ_1 ja λ_2 ovat erit ja negatiiviset. Koska $f(0,0) = g(0,0) = 0$, differentiaalikehitelmä origossa saa muodon

$$\begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} = A\mathbf{z} + \|\mathbf{z}\|\mathbf{o}(h)$$

jossa A on linearisoinnin matriisi ja $\|\mathbf{o}(h)\| \to 0$, kun $h = \|\mathbf{z}\| \to 0$.

Olkoon B lemmassa mainittu symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi. Erityisesti se määrittelee $\mathbb{R}^2$:n normin (6.13). Käytetään kyseistä normia nk. *Lyapunovin funktiona*: määritellään

$$V(\mathbf{z}) = V(x,y) = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|_B^2 = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Olkoon $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ systeemin (6.1) ratkaisu. Tätä vastaten määritellään vielä

$$s(t) = V(\mathbf{z}(t)) = V(x(t), y(t)).$$

Silloin differentiaalikehitelmästä saadaan

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}}^T B\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T B\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^T B\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^T B[f(x,y)\ g(x,y)]^T \\ &= \mathbf{z}^T BA\mathbf{z} + \|\mathbf{z}\|\mathbf{z}^T B\mathbf{o}(h). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Koska BA on negatiivisesti definiitti, löytyy sellainen $\alpha > 0$ että

$$\mathbf{z}^T BA\mathbf{z} \leq -2\alpha\|\mathbf{z}\|^2 \quad \text{kaikilla } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2.$$

Tämän arvion, kehitelmän (6.15) ja yhtälön (6.14) nojalla löytyy sellainen $\epsilon > 0$ että

$$\dot{s}(t) \leq -\alpha\|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq -2\frac{\alpha}{r}s(t) = -\beta s(t) \quad \text{kaikilla } \mathbf{z}(t) \in B(\mathbf{0}, \epsilon), \tag{6.16}$$

kun matriisissa B on valittu $r \geq 1$. Lisäksi $\beta = 2\alpha/r > 0$. Siten löytyy sellainen $\delta > 0$ että jos $\mathbf{z}(0) \in B(\mathbf{0}, \delta)$, niin

$$\dot{s}(t) \leq 0 \quad \text{ja} \quad \mathbf{z}(t) \in B(\mathbf{0}, \epsilon) \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{6.17}$$

Ratkaisu $\mathbf{z}(t)$ todella elää ajassa äärettömiin (Poistumislause). Koska $\epsilon > 0$ voidaan valita kuinka pieneksi tahansa, arviosta (6.17) seuraa erityisesti $\mathbf{0}$:n stabiilisuus.

Kun $\mathbf{z}(0) \in B(\mathbf{0}, \delta)$, arvioiden (6.16) ja (6.17) mukaan pätee

$$\dot{s}(t) + \beta s(t) \leq 0 \quad \text{kaikilla } t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\big(s(t)e^{\beta t}\big) \leq 0 \quad \text{kaikilla } t \geq 0 \Rightarrow s(T)e^{\beta T} - s(0)$$
$$= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(s(t)e^{\beta t}\big)\, dt \leq \int_0^T 0\, dt = 0 \Rightarrow s(T) \leq s(0)e^{-\beta T} \to 0, \text{ kun } T \to \infty.$$

Siis $\|\mathbf{z}(t)\|_B \to 0$ ja siten $\|\mathbf{z}(t)\| \to 0$, kun $t \to \infty$. Stabiilisuus on asymptoottista. □

Kirjataan Poincarén lause vielä taulukon muotoon: $\det A \neq 0$,

$\mathbf{A : n}$ **ominaisarvot**	$\mathbf{0 : n}$ **laatu linearisoinnissa**	**sen laatu** $(\mathbf{6.1})$ **: ss**
positiiviset	*epastabiili*	*epastabiili*
negatiiviset	*asymptoottisesti stabiili*	*asymptoottisesti stabiili*
erimerkkiset	*epastabiili (nk. satulapiste)*	*epastabiili (nk. satulapiste)*
kompleksiset ominaisarvot :		
reaaliosa positiivinen	*epastabiili*	*epastabiili*
reaaliosa negatiivinen	*asymptoottisesti stabiili*	*asymptoottisesti stabiili*
reaaliosa nolla	*stabiili (keskus)*	*laatu avoin.*

Esimerkki 6.6. Tarkastaellaan autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 7x - x^2 - 2xy \\ \dot{y}(t) &= 5y - y^2 - xy. \end{aligned}$$

Noin sivumennen, se mallintaa samasta ravinnosta kilpailevia populaatioita. Kriittiset pisteet:

$x(7 - x - 2y) = 0,\ y(5 - y - x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ tai $(x, y) = (0, 5)$ tai $(x, y) = (7, 0)$ tai $(x, y) = (3, 2)$.

Niitä ei tarvitse siirtää muunnoksella origoon (koska derivaattamatriisi säilyy muunnoksessa)! Linearisointi:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 5 - 2y - x \end{bmatrix}.$$

$(x, y) = (0, 0)$: Silloin

$$A = A(0, 0) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 0 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(5 - \lambda) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 7$, positiiviset. Siten kriittinen piste $(0, 0)$ on epästabiili.

$(x, y) = (0, 5)$: Silloin

$$A = A(0,5) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ -5 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+5) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -5$, negatiiviset. Siten kriittinen piste $(0,5)$ on asymptoottisesti stabiili.

$(x,y) = (7,0)$: Silloin

$$A = A(7,0) = \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -14 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(7+\lambda) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -7$, negatiiviset. Siten kriittinen piste $(7,0)$ on asymptoottisesti stabiili.

$(x,y) = (3,2)$: Silloin

$$A = A(3,2) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -6 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -6$, erimerkkiset. Siten kriittinen piste $(3,2)$ on epästabiili (satulapiste).

Suorat $x = 0$ ja $y = 0$ ovat mallissa selvästi invariantteja: niillä pysytään, jos niiltä aloitetaan. OY-lauseesta 5.3 seuraa, että myös ensimmäinen (avoin) koordinaattineljännes on invariantti, kuten populaatiomallilta sopii odottaakin. Ylipäätään malli virtauskuvioineen sisältää selvästi mielenkiintoista biologista informaatioita.

Esimerkki 6.7. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3x + 2y - xy + y^3 \\ \dot{y}(t) &= -x - y + x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Selvästi origo on systeemin kriittinen piste, eikä nyt välitetä mahdollisista muista. Tutkitaan sen laatu. Linearisointi:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-y & 2-x+3y^2 \\ -1+2x & -1-2y \end{bmatrix}, \quad A = A(0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm i.$$

Kompleksiset, reaaliosa negatiivinen. Siten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Poincarén lauseen käytöllä on kuitenkin rajoituksensa. Esimerkiksi tartuntatautien SIR-mallissa

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \alpha R_0 i(t)s(t) - \alpha i(t) \\ \frac{ds}{dt} &= -\alpha R_0 i(t)s(t) \end{aligned}$$

kriittiset pisteet ovat $(0, s)$, $s \in \mathbb{R}$. Linearisoinnin matriisi

$$A(0, s) = \begin{bmatrix} \alpha R_0 s - \alpha & 0 \\ -\alpha R_0 s & 0 \end{bmatrix}$$

on kuitenkin singulaarinen: $\det A = 0$. Siten Poincarén lausetta ei voi käyttää. Muuta tietä voidaan osoittaa (kts. alaluku 2.3.2), että kriittinen piste $(0, s)$, $s > 0$, on stabiili tasan silloin kun $R_0 < 1/s$ (kun $R_0 > 1/s$ syntyy epidemia).

Samoin käy SIS-mallissa. Esimerkin 6.5 linearisoinnin matriisi A on singulaarinen kriittisissä pisteissä $(s, 2)$. Kriittisessä pisteessä $(2, 0)$ se on

$$A(2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ja ominaisarvot ovat $\lambda = \pm 2i$. Pisteiden laatu nähtiin kuitenkin suoraan.

♣♣♣