Diff.yht. II, harj. 5, (6.–)7.12.2011, ratk. (JL), 4 tekstisivua (tehtävän 5 kuvasivu erikseen)

1. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Ohje. Suora yrite. Se johtaa 4×4-kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.

Ratk. Ratkaistaan ensin täydelleen homogeeninen systeemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus 0);$$
$$(A + I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -2u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Täten homogeenisen systeemin yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Huomataan, että $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\sin t$ ei sisälly homogeenisen systeemin ratkaisuihin. Tehdään siksi (1):n yksittäisratkaisun löytämiseksi yrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ määritettävin kertoimin $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Yritteelle on

$$\begin{aligned}
(1) &\iff -\mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t = A\mathbf{a}\cos t + A\mathbf{b}\sin t + \mathbf{f}(t) \\
&\iff -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\cos t = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 4a_1 + a_2 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ 4b_1 + b_2 \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\sin t \\
&\iff \begin{cases} -a_1 = b_1 + b_2 & (\alpha) \\ -a_2 = 4b_1 + b_2 - 1 & (\beta) \\ b_1 = a_1 + a_2 - 1 & (\gamma) \\ b_2 = 4a_1 + a_2 & (\delta) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ehdot (γ), (α) ja (β) antavat $b_1 = a_1 + a_2 - 1 = -5b_1 - 2b_2$, jolloin $b_2 = -3b_1$; tällöin $(\alpha) \iff a_1 = 2b_1$ ja $(\beta) \iff a_2 = -b_1 + 1$, jolloin kääntäen (γ) toteutuu. Nyt $(\delta) \iff -3b_1 = 8b_1 - b_1 + 1 \iff 10b_1 + 1 = 0 \iff b_1 = -1/10$. Tällöin $a_1 = -2/10$, $a_2 = 11/10$ ja $b_2 = 3/10$. Täten yritteelle on

$$(1) \iff \mathbf{x}(t) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = \underline{C_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\sin t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

2. (Vaikeampi, kahden suorituspisteen arvoinen.) *Homogeenisysteemillä*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A(t)\mathbf{z}(t), \quad \text{jossa } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

on välillä $I =]0,\infty[$ ratkaisu

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi systeemin perusjärjestelmä välillä I ja kirjoita yleinen ratkaisu.

Ohje. Eliminointi auttaa.

Ratk. Ensin (y:n) eliminointi:

$$(1) \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t)/t^2 + y(t)/t \end{cases} \iff \begin{cases} y(t) = -\dot{x}(t) \\ -\ddot{x}(t) = x(t)/t^2 - \dot{x}(t)/t \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x}(t) - (1/t)\dot{x}(t) + (1/t^2)x(t) = 0 \\ y(t) = -\dot{x}(t). \end{cases}$$

Huomataan, että jos $x(t) = x_1(t) = t$ ja $y(t) = y_1(t) = -1$ $\forall t \in I$, niin $y(t) = -\dot{x}(t)$ ja $(1/t^2)x(t) - (1/t)\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = (1/t^2)t - (1/t)1 + 0 = 0$ $\forall t \in I$, joten $\mathbf{z}_1$ on todellakin ratkaisu välillä I.

Tehdään 2. kl. yhtälöön yrite $x(t) = a(t)x_1(t) = a(t)t$ derivoituvalla funktiolla a, joka ei ole vakio; tällöin

$$0 = \frac{1}{t^2}x(t) - \frac{1}{t}\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = \frac{1}{t^2}a(t)t - \frac{1}{t}(\dot{a}(t)t + a(t)) + (\ddot{a}(t)t + 2\dot{a}(t)) = \ddot{a}(t)t + \dot{a}(t) \iff \ddot{a}(t) + \frac{1}{t}\dot{a}(t) = 0$$

$$\Longleftarrow \dot{a}(t) = e^{-\int (dt/t)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} \Longleftarrow a(t) = \ln t \iff x(t) = a(t)t = t\ln t.$$

Nyt $y(t) = -\dot{x}(t) = -1 - \ln t$. Näin ollen

$$\mathbf{z}_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\ln t \\ -1 - \ln t \end{bmatrix}$$

on (1):n ratkaisu, jolla $x_2(t)/x_1(t) = a(t) = \ln t$ $\forall t \in I$ ei ole vakio. (Vaihtoehtoisesti voitaisiin osoittaa, että $W(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)(t) = -t < 0$ $\forall t \in I$.) Täten $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä välillä I. Yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t\ln t \\ -1 - \ln t \end{bmatrix} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Vaihtoehtoisesti eliminoimalla x saadaan (yhtäpitävä) systeemi

$$\begin{cases} x(t) = t^2\dot{y}(t) - ty(t) \\ \ddot{y}(t) + (1/t)\dot{y}(t) = 0 \end{cases},$$

jonka jälkimmäinen yhtälö on siis sama kuin a:lle edellisessä ratkaisutavassa (jos tehtäisiin siihen [nyt tarpeeton] yrite $y(t) = b(t)y_1(t) = -b(t)$, tulisi b:llekin tietysti sama yhtälö!). Valitsemalla ratkaisu $y(t) = \ln t$ tulee $x(t) = t^2(1/t) - t\ln t = t - t\ln t$. Saadaan ratkaisu $\mathbf{z}_2(t) = (t - t\ln t, \ln t)$, jolloin $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on perusjärjestelmä. Vertailuksi edelliseen ratkaisutapaan huomataan, että $\mathbf{z}_1(t) - \mathbf{z}_2(t) = (t\ln t, -1 - \ln t)$.

3. *Määritä seuraavien autonomisten systeemien kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):*

$$\textbf{(a)} \quad \begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x + y + 5, \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 8 \\ \dot{y} = x - 2y + 1. \end{cases}$$

Ratk. (a) Olkoot $f(x,y) = y - 1$ ja $g(x,y) = -x + y + 5$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ kyseisen epähomogeenisen lineaarisen systeemin määrittelevät funktiot. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 5 \end{cases} \iff \underline{(x,y) = (6,1)}.$$

Kuvauksen $(f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarisen osan matriisi on $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Määritetään matriisin A ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Siis juuret λ ovat kompleksiset liittoluvut, ja niillä on $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2} > 0$. Täten kriittinen piste $(6,1)$ on epästabiili.

(b) Kriittiset pisteet: $\begin{cases} -4x+2y+8=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \overset{\text{r1+r2}}{\iff} \begin{cases} -3x+9=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \iff \underline{(x,y)=(3,2).}$

Lineaarisen osan matriisin $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -3 \pm \sqrt{3}$. Nämä ovat erisuuret ja negatiiviset. Siis kriittinen piste $(3,2)$ on <u>asymptoottisesti stabiili</u>.

4. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = 2 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Ratk. Olkoon $f(x,y) = x^2 - y$ ja $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2+y-2 = (y-1)(y+2) = 0 \end{cases}$$
$$\iff x^2 = y = 1 \quad \text{tai} \quad x^2 = y = -2 \iff \underline{(x,y) = (-1,1) \text{ tai } (x,y) = (1,1).}$$

Kuvauksen (f,g) derivaatan matriisi on $A(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -2x & -2y \end{bmatrix}$.

Matriisien $A(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ja $A(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot:

$$\det(A(-1,1)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -2 \pm i\sqrt{2};$$
$$\det(A(1,1)-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{6}.$$

Kriittinen piste <u>$(-1,1)$ on asymptoottisesti stabiili</u>, sillä $\mathrm{Re}(-2 \pm i\sqrt{2}) = -2 < 0$; koska lisäksi $\mathrm{Im}(-2 \pm i\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2} \neq 0$, niin radat lähestyvät pistettä $(-1,1)$ spiraalimaisesti.
Kriittinen piste <u>$(1,1)$ on epästabiili</u>, sillä ominaisarvot $\pm\sqrt{6}$ ovat erimerkkiset: satulapiste.

5. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat:*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-2) \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Luonnostele lisäksi virtauskuvio, lähinnä ratoja virtaussuuntineen. Kertooko se jotain kriittisten pisteiden laadusta?

Ratk. Olkoon $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ ja $g(x,y) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \text{ tai } y=2 \\ x=-1 \text{ tai } x=2 \end{cases} \iff (x,y) = \underline{(-1,s)} \text{ jollain } s \in \mathbb{R} \text{ tai } (x,y) = \underline{(2,2)}.$$

Suoran $x = -1$ jokainen piste on kriittinen piste; kyseessä on *kriittinen suora*.

Jokaiseen kriittiseen pisteeseen liittyy pistemäinen rata.

Määritetään radat kriittisten pisteiden joukon komplementissa $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1, (x,y) \neq (2,2)\}$. Radat joukon $f(x,y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $y = 2$ ulkopuolella saadaan separoituvasta differentiaaliyhtälöstä:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(y-2)} = \frac{x-2}{y-2} \iff \int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$$
$$\iff \tfrac{1}{2}(y-2)^2 = \tfrac{1}{2}(x-2)^2 + C_0 \ (C_0 \in \mathbb{R}) \overset{C=-2C_0}{\iff} \underline{(x-2)^2 - (y-2)^2 = C} \ (C \in \mathbb{R}).$$

Joukon $g(x,y)=0$ eli suorien $x=-1$ ja $x=2$ ulkopuolella saadaan radoille separoituva differentiaaliyhtälö $dx/dy = f(x,y)/g(x,y) = (y-2)/(x-2)$, jolloin tulee sama yhtälö $\int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$ ja sama lopullinen käyrä kuin yllä. Näin saatiin radoista selvitettyä myös ehdon $f(x,y) \neq 0$ poistamat pisteet.

Jos $C \neq 0$, tämä käyrä on C:n merkin mukaan jompikumpi hyperbeleistä

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} = \pm 1;$$

jos taas $C=0$, tämä käyrä on näiden hyperbeliparvien yhteiset aymptoottisuorat

$$(y-2) = \pm(x-2).$$

Nämä radat ovat kriittisten pisteiden näiden hyperbelien haaroista ja niiden asymptooteista erottamilla yhtenäisillä avoimilla kaarilla. Itse asiassa nämä avoimet kaaret ovat kokonaisia ratoja, mikä nähdään seuraavasti. Olkoon $(x(\cdot), y(\cdot)) \colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ maksimaalinen ratkaisu ja $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ välin Δ päätepiste. Funktioista $x(\cdot)$ ja $y(\cdot)$ ainakin toinen on monotoninen, kuten jäljempänä oleva f:n ja g:n merkkien tutkiminen osoittaa, joten ainakin toinen raja-arvoista

$$x_\alpha = \lim_{t\to\alpha} x(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad \text{ja} \qquad y_\alpha = \lim_{t\to\alpha} y(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

on olemassa, jolloin radan yhtälöstä seuraa, että toinenkin on olemassa ja pätee $x_\alpha \in \mathbb{R} \iff y_\alpha \in \mathbb{R}$. Tapauksessa $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ seuraa 1. kl. systeemien poistumislauseesta, että $\alpha = -\infty$ tai $\alpha = \infty$; tästä puolestaan seuraa Lauseen 6.4 nojalla, että (x_α, y_α) on kriittinen piste. Täten jokainen äsken mainittu avoin kaari on kokonainen rata.

Suoralla $y=2$ on $f(x,y)=0$ (eli virtauksella on alustavasti suunta $|$) ja $g(x,y) = (x+1)(x-2) > 0$ (eli virtauksella on suunta $\uparrow$), jos $x < -1$ tai $x > 2$, ja $g(x,y) < 0$ (eli virtauksella on suunta $\downarrow$), jos $-1 < x < 2$. Suoralla $x=2$ on $g(x,y)=0$ (eli virtauksella alustavasti suunta $-$) ja $f(x,y) = 3(y-2) > 0$ (eli virtauksella suunta $\to$), jos $y > 2$, ja $f(x,y) < 0$ (eli virtauksella suunta $\leftarrow$), jos $y < 2$. Alueissa $G_1 = \{(x,y) \in G \mid x < -1\}$ ja $G_2 = \{(x,y) \in G \mid x > -1\}$ eivät f ja g voi jatkuvina funktioina vaihtaa merkkiään muualla kuin suorilla $y=2$ ja $x=2$, mikä polynomeista f ja g nähdään suoraankin. Saaduista viidestä nuolesta (**Kuvio 1**) voidaan siis ratojen kulkusuunta määrittää (**Kuvio 2**).

Vaihtoehtoisesti ennen ratojen kulkusuunnan määrittämistä voidaan ensin selvittää f:n ja g:n merkkiyhdistelmät $++$, $+-$, $--$ tai $-+$ suorien $x=-1$, $x=2$ ja $y=2$ rajaamissa alueissa ja piirtää näiden nojalla virtauksen suunta näissä alueissa muodossa $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$ tai $\nwarrow$ (**Kuvio 3**). Suorilla $y=2$ ja $x=2$ virtauksen suunta määräytyy näistä f:n ja g:n jatkuvuuden perusteella muodossa $\uparrow$, $\downarrow$, $\to$ tai $\leftarrow$.

Kuvauksen (f,g) derivaatalla pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on matriisi $A(x,y) = \begin{bmatrix} y-2 & x+1 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nyt $A(2,2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, joten $\det(A(2,2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$; siis matriisin $A(2,2)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, jolloin Poincarén lauseen nojalla kriittinen piste $(2,2)$ on <u>epästabiili</u>. Tämä nähdään myös Kuviosta 2.

Toisaalta, kun $s \in \mathbb{R}$, niin $A(-1,s) = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ on alakolmiomatriisi, joten sen ominaisarvot ovat lävistäjän alkiot $\lambda_1 = s-2$ ja $\lambda_2 = 0$; tällöin on myös $\det A(-1,s) = 0$. Siis <u>Poincarén lause ei tähän tapaukseen sovellu</u>. Mutta Kuviosta 2 nähdään, että kriittinen piste $(x,y) = (-1,s)$ on <u>epästabiili</u>, jos $s \geq 2$, ja <u>stabiili, mutta ei asymptoottisesti stabiili</u>, jos $s < 2$.