Diff.yht. II, harj. 4, 29.–30.11.2011, ratk. (JL), 6 sivua
TIISTAIN RYHMÄ: Voitte palauttaa 5. ratkaisunne minulle, mutta viimeistään ke 7.12. (kirje/sp).

1. *Muodosta perusmatriisi* $\mathbb{R}$*:ssä homogeenisysteemille* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$*, kun*

$$\textbf{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -8 & 14 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \textbf{(b)}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Määritä lisäksi systeemin tasapainoratkaisun $\mathbf{0}$ *laatu (stabiili vai epästabiili).*

Ratk. (a) Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -8 & 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+7\lambda+14) - 8$$
$$= -(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \iff \lambda \in \{-1,-2,-4\}.$$

Siis kolme erisuurta reaalista ominaisarvoa, ja ne kaikki ovat negatiivisia. Täten $\mathbf{0}$ on <u>stabiili</u>.
Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\lambda = -1: \quad (A-(-1)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & 14 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 6u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff u_1 = u_2 = u_3 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$$\lambda = -2: \quad (A-(-2)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 14 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 5u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 4u_1 \end{cases} \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$$\lambda = -4: \quad (A-(-4)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -8 & 14 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4u_1 - u_2 = 0 \\ 4u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 3u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_2 = 4u_1 \\ u_3 = 16u_1 \end{cases} \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Siis ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_3(t) = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ muodostavat systeemin perusjärjestelmän $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Täten systeemillä on perusmatriisi

$$X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_3(t)\,] = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} & 4e^{-4t} \\ e^{-t} & 4e^{-2t} & 16e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

(b) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 3$. Siis kaksi erisuurta reaalista ominaisarvoa, ja niiden joukossa on posiivinen. Täten $\mathbf{0}$ on <u>epästabiili</u>. (Koska ominaisarvot ovat erimerkkiset, on $\mathbf{0}$ satulapiste.)
Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\lambda = 3: \quad (A-3I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -4u_1 & + u_2 = 0 \\ 8u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u_2 = 4u_1$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$$\lambda = -3: \quad (A-(-3)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2u_1 & + u_2 = 0 \\ 8u_1 + 4u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u_2 = -2u_1$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Systeemillä on siis perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, jossa $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Täten systeemillä on perusmatriisi

$$X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,] = \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-3t} \\ 4e^{3t} & 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

2. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

käyttäen varioimiskeinoa. Mikä suora yrite johtaisi tulokseen helpommin?

Ratk. Ratkaistaan ensin homogeenisysteemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Etsitään A:n ominaisarvot: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm i$.
Etsitään kompleksista ominaisarvoa $\lambda = i \in \mathbb{C}$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$(A-iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} -iu_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - iu_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u_1 = iu_2 \Longleftrightarrow \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Valinnalla $c = 1$ saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

josta saadaan reaalisista ratkaisuista

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

koostuva perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin $X(t) = [\,\mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_1(t)\,] = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on systeemin perusmatriisi (sarakkeiden järjestykseksi otettiin tämä, jotta saatiin kiertomatriisi).
Täten homogeeniyhtälön $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$).

Täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään varioimiskeinoa ja kirjoitetaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$; nyt

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \\
&\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = AX(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \\
&\quad \iff \dot{\mathbf{c}}(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{bmatrix} \\
&\quad \Longleftarrow \mathbf{c}(t) = \int \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Näin saadaan yksittäisratkaisu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \sin t - \cos^2 t - 2\sin t \cos t - \sin^2 t \\ 2\sin^2 t - \sin t \cos t + 2\cos^2 t + \cos t \sin t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ 2(\sin^2 t + \cos^2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nopeammin olisi toiminut yrite, joka on samaa muotoa kuin yhtälön oikea puoli, eli siis vakiofunktioyrite $\mathbf{x}(t) = [\, a \quad b \,]^T$ $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{0} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{x}(t) = A^{-1}(-\mathbf{f}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

3. *Etsi eliminointikeinolla seuraavan homogeenisysteemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{1}$$

Ratk. Kirjoitetaan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Nyt (1) $\iff \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 \end{cases}$. Derivoidaan ensimmäinen yhtälö, sijoitetaan $\dot{x}_2$ toisesta yhtälöstä ja lopuksi sijoitetaan $x_2 = \dot{x}_1 + x_1$ ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 + (-x_1 - 3x_2) = -\dot{x}_1 - x_1 - 3x_2 = -\dot{x}_1 - x_1 - 3(\dot{x}_1 + x_1) = -4\dot{x}_1 - 4x_1 \\
&\iff \ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 4x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Tämän vakiokertoimisen lineaarisen homogeeniyhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 + 4r + 4 = 0 \iff r = -2$. Tulee yleinen ratkaisu $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$. Nyt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) + x_1(t) = (-2C_1 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t} + C_2 e^{-2t}) + (C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}) = (-C_1 + C_2)e^{-2t} - C_2 t e^{-2t}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä on $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 - t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Täten (1):llä on $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, jossa $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 - t \end{bmatrix}$.

4. *Etsi tehtävän 3 homogeenisysteemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä matriisikeinolla, joka soveltaa yleistettyjä ominaisvekroreita.*

Ohje. Luentomonisteen yhtälöt (5.31) ja (5.32).

Ratk. Matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ karakteristisella yhtälöllä $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2 = 0$ (eli samalla karakteristisella yhtälöllä kuin on tehtävän 3 ratkaisun skalaarisella DY:llä) on kaksoisjuuri $\lambda = -2$. Määritetään ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(A+2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Täten A:n ominaisvektoreista ei voida valita kantaa $\mathbb{R}^2$:lle. Siis perusjärjestelmää ei saada suoraan matriisikeinolla. Tulee kuitenkin yksi ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ perusjärjestelmään.

Perusjärjestelmän toisen ratkaisun löytämiseksi muodossa

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{At}\mathbf{v} = e^{-2t}e^{(A+2I)t}\mathbf{v} = e^{-2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n(A+2I)^n\mathbf{v}$$

tarvitaan vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, jolla $(A+2I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ mutta jolla $(A+2I)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ eli $\mathbf{v} \nparallel [\,1 \quad -1\,]^T$. Huomataan, että

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voidaan siis valita $\mathbf{v} = [\,0 \quad 1\,]^T$; tämä poimii matriisista $A+2I$ sen jälkimmäisen sarakkeen. Näin saadaan toinen ratkaisu perusjärjestelmään funktiosta

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = e^{-2t}\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}.$$

Olisi helppo sijoittamalla todeta, että $\mathbf{x}_2$ on todellakin ratkaisu. Tietysti $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(0) = \det[\,\mathbf{u} \quad \mathbf{v}\,] \neq 0$.

5. (Kahden suorituspisteen arvoinen työläs tehtävä). *Kahden kuulan ja kolmen jousen värähtelijässä päädyttiin 2. kl. homogeeniseen, vakiokertoimiseen systeemiin*

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

jossa $m, k > 0$ ovat vakioita. Ratkaise systeemi, mielellään matriisikeinolla.

I ratk. (lyhyempi II ratk. perässä) Merkitään $a = k/m$. Määritellään $z_1 = x_1$, $z_2 = \dot{x}_1$, $z_3 = x_2$ ja $z_4 = \dot{x}_2$ sekä $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Tällöin

$$(2) \iff \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -2az_1 + az_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = az_1 - 2az_3 \end{cases} \iff \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}, \quad \text{jossa} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & -2a & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2a & -\lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a & 0 & -2a & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2a & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2a & a & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & -2a & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{s1,r1}}{=} \lambda^2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2a & -\lambda \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2a & -\lambda \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2+2a) + 2a(\lambda^2+2a) - a^2$$

$$= (\lambda^2+2a)^2 - a^2 = (\lambda^2+a)(\lambda^2+3a) = 0 \iff \lambda^2 \in \{-a, -3a\} \iff \lambda \in \{\pm i\omega, \pm i\eta\},$$

kun merkitään $\omega = \sqrt{a}$ ja $\eta = \sqrt{3a}$. Etsitään ominaisarvoihin $\lambda = i\omega \in \mathbb{C}$ ja $\lambda = i\eta \in \mathbb{C}$ liittyvät ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - i\omega I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -i\omega & 1 & 0 & 0 \\ -2\omega^2 & -i\omega & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & -2\omega^2 & -i\omega \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_2 = i\omega u_1 \\ -2\omega^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega^2 u_3 = 0 \\ u_4 = i\omega u_3 \\ \omega^2 u_1 - 2\omega^2 u_3 + \omega^2 u_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = i\omega u_1 \\ u_3 = u_1 \\ u_4 = i\omega u_1 \\ u_3 = u_1 \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{u} = s(1, i\omega, 1, i\omega) \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}); \quad \text{valitaan } \mathbf{u}_1 = (1, i\omega, 1, i\omega);$$

$$(A - i\eta I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -i\eta & 1 & 0 & 0 \\ -2\eta^2/3 & -i\eta & \eta^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\eta & 1 \\ \eta^2/3 & 0 & -2\eta^2/3 & -i\eta \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_2 = i\eta u_1 \\ -(2\eta^2/3)u_1 + \eta^2 u_1 + (\eta^2/3)u_3 = 0 \\ u_4 = i\eta u_3 \\ (\eta^2/3)u_1 - (2\eta^2/3)u_3 + \eta^2 u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_2 = i\eta u_1 \\ u_3 = -u_1 \\ u_4 = -i\eta u_1 \\ u_3 = -u_1 \end{cases} \iff \mathbf{u} = s(1, i\eta, -1, -i\eta) \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}); \quad \text{valitaan } \mathbf{u}_2 = (1, i\eta, -1, -i\eta).$$

Saadaan kompleksiset ratkaisut

$$\begin{aligned} e^{i\omega t}\mathbf{u}_1 &= (\cos\omega t + i\sin\omega t)((1,0,1,0) + i\omega(0,1,0,1)), \\ e^{i\eta t}\mathbf{u}_2 &= (\cos\eta t + i\sin\eta t)((1,0,-1,0) + i\eta(0,1,0,-1)), \end{aligned}$$

joiden reaali-ja imaginääriosista tulee seuraava perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= (1,0,1,0)\cos\omega t - (0,1,0,1)\omega\sin\omega t, \\ \mathbf{z}_2(t) &= (0,1,0,1)\omega\cos\omega t + (1,0,1,0)\sin\omega t, \\ \mathbf{z}_3(t) &= (1,0,-1,0)\cos\eta t - (0,1,0,-1)\eta\sin\eta t, \\ \mathbf{z}_4(t) &= (0,1,0,-1)\eta\cos\eta t + (1,0,-1,0)\sin\eta t. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$\mathbf{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \cos\eta t \\ -\eta\sin\eta t \\ -\cos\eta t \\ \eta\sin\eta t \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} \sin\eta t \\ \eta\cos\eta t \\ -\sin\eta t \\ -\eta\cos\eta t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}).$$

Täten alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (z_1(t), z_3(t))$ on

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \cos\omega t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin\omega t \\ \sin\omega t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \cos\eta t \\ -\cos\eta t \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} \sin\eta t \\ -\sin\eta t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}),$$

jossa siis $\omega = \sqrt{k/m}$ ja $\eta = \sqrt{3k/m}$. (Ratkaisu *ei* yleensä ole jaksollinen, koska $\eta/\omega = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.)

II ratk. Olkoon jälleen $a = k/m > 0$. Tällöin

$$(2) \iff \begin{cases} \ddot{x}_1 = -2ax_1 + ax_2 \\ \ddot{x}_2 = ax_1 - 2ax_2 \end{cases} \iff \ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}, \quad \text{jossa} \quad B = \begin{bmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Kuten I ratkaisussa huomattiin, 2. kl. vakiokertoiminen lineaarinen homogeeninen systeemi $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ on yhtäpitävä 1. kl. vakiokertoimisen lineaarisen homogeenisen systeemin $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ kanssa, jossa siis A on (4×4)-matriisi. Tarkemmin sanoen kuvaukset $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ ja $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{x} = (z_1, z_3)$ yhtälöiden ratkaisuavaruuksien välillä ovat toistensa käänteiskuvauksia ja siis bijektioita; lisäksi ratkaisuavaruudet ovat vektoriavaruuksia ja nämä kuvaukset lineaarisia ja siis lineaarisia isomorfismeja. Teorian nojalla tiedetään, että yhtälön $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ ratkaisuavaruus on 4-ulotteinen. Siksi myös yhtälön $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ ratkaisuavaruus on 4-ulotteinen. Tämän nojalla yhtälöllä $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ on perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$.

Perusjärjestelmän löytämiseksi etsitään nyt muotoa $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}\ \forall t \in \mathbb{R}$ olevia ratkaisuja, jossa $r \in \mathbb{C}$ ja $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ovat vakioita. Sijoitus antaa ehdon

$$r^2 e^{rt}\mathbf{u} = e^{rt}B\mathbf{u} \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff B\mathbf{u} = r^2\mathbf{u}.$$

Siis luvun $\lambda = r^2$ on oltava (symmetrisen) matriisin B ominaisarvo ja vektorin $\mathbf{u}$ tähän ominaisarvoon liittyvä B:n ominaisvektori. Karakteristisen yhtälön

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2a - \lambda & a \\ a & -2a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4a\lambda + 3a^2 = (\lambda + a)(\lambda + 3a) = 0$$

juuret ovat erisuuret negatiiviset reaaliluvut $\lambda = -a$ ja $\lambda = -3a$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit:

$$\begin{aligned}(B + aI)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ (s \in \mathbb{C} \setminus \{0\});\\ (B + 3aI)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ (s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Kummassakin valitaan $s = 1$. Merkitään jälleen $\omega = \sqrt{a} > 0$ ja $\eta = \sqrt{3a} = \omega\sqrt{3} > 0$. Tällöin $\lambda = -a \iff r = \pm i\omega$ ja $\lambda = -3a \iff r = \pm i\eta$. Nyt $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ ja $e^{i\eta t} = \cos\eta t + i\sin\eta t$. Täten saadaan reaaliarvoiset ratkaisut

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\omega t, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin\omega t, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cos\eta t, \quad \mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\sin\eta t.$$

Jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ on vapaa, sillä jos se olisi sidottu, niin myös jono $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)$ olisi sidottu, kun $\mathbf{y}_k = (\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$ $(k = 1, \ldots, 4)$, vastoin sitä, että

$$W(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \eta \\ 0 & \omega & 0 & -\eta \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \omega & 0 & \eta \\ \omega & 0 & -\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \eta \\ 0 & \omega & -\eta \end{vmatrix} \overset{\text{r1,r1}}{=} -2\omega\eta - 2\omega\eta = -4\omega\eta \neq 0.$$

Koska jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ on siis vapaa $\mathbb{R}$:ssä, niin se on perusjärjestelmä. Yleinen ratkaisu on näin ollen

$$\mathbf{x}(t) = C_1\begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \cos\omega t \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin\omega t \\ \sin\omega t \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} \cos\eta t \\ -\cos\eta t \end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix} \sin\eta t \\ -\sin\eta t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}),$$

eli sama kuin I ratkaisussa.

III ratk. Systeemistä $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ saadaan sijoituksella

$$\begin{cases} y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ y_2 = (-x_1 + x_2)/\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (y_1 - y_2)/\sqrt{2} \\ x_2 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + ay_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + 3ay_2 = 0, \end{cases}$$

jonka molemmat skalaariyhtälöt voidaan ratkaista erikseen; ratkaisuista voidaan sitten johtaa systeemin $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ yleinen ratkaisu. Tällaisen ratkaisun takana on (symmetrisen) matriisin B diagonalisointi: Ominaisvektoreista saadulle ortogonaaliselle matriisille $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ja sen käänteismatriisille $U^{-1} = U^T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ pätee, että jos $D = U^{-1}BU$, niin $D = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -3a \end{bmatrix}$ on ominaisarvojen antama lävistäjämatriisi, jolloin sijoitus $\mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = U\mathbf{y}$ antaa yhtälön $\ddot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}$.