**Diff.yht. II, harjoitus 3, 22.–23.11.2011, ratkaisut (JL), 3 sivua**

**1.** *Palauta seuraavat differentiaaliyhtälöt* 1. *kl. normaalimuotoisiksi systeemeiksi:*

**(a)** $y'' - \frac{1}{3}y^{(3)} + xy - 2x^3 = 0$,

**(b)** $(y'')^2 - \frac{1}{3}y^{(3)} + xyy' - 2x^3 = 0$.

Onko systeemi lineaarinen, ja jos on, niin onko se vakiokertoiminen?

**Ratk. (a)** Normaalimuotoisena yhtälö kuuluu $y^{(3)} = 3xy + 3y'' - 6x^3$. Merkitsemällä $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$ (sekä kääntäen $y = y_1$) saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3xy_1 + 3y_3 - 6x^3 \end{cases} \qquad \text{eli} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3x & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Yhtälöryhmä on lineaarinen, mutta ei vakiokertoiminen (kerroin $3x$).

**(b)** Normaalimuotoisena yhtälö kuuluu $y^{(3)} = 3xyy' + 3(y'')^2 - 6x^3$. Merkitsemällä $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$ (sekä kääntäen $y = y_1$) saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3xy_1y_2 + 3y_3^2 - 6x^3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä ei ole lineaarinen (termit $y_1y_2$ ja $y_3^2$).

**2.** *Osoita, että funktiopari* $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \left([2 \quad e^t]^T, [e^{-t} \quad 1]^T\right)$ *on lineaarisen* $2 \times 2$*-homogeenisysteemin*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

*perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä.*

**Ratk.** Olkoon $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva. Koska

$$A(t)\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2e^{-t})e^t \\ e^t \cdot 2 + (-1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2 \\ e^t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

niin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Samoin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, sillä

$$A(t)\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi pari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, sillä sen Wronskin determinantille on

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - e^t e^{-t} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Täten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

**3.** *Etsi seuraavan lineaarisen* $2 \times 2$*-homogeenisysteemin perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

(1)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

**Ratk.** Merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Silloin (1) $\iff \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = tx_1(t) - x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} \\ \dot{x}_2(t) + x_2(t) = C_1 t e^{-t} \end{cases}$.
Tässä $\dot{x}_2(t) + x_2(t) = C_1 t e^{-t} \iff e^t \dot{x}_2(t) + e^t x_2(t) = C_1 t \iff \frac{d}{dt}(e^t x_2(t)) = C_1 t \iff e^t x_2(t) = \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 \iff x_2(t) = \frac{1}{2}C_1 t^2 e^{-t} + C_2 e^{-t}$. Täten (1) $\iff \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ \frac{1}{2}C_1 t^2 e^{-t} + C_2 e^{-t} \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ joillain $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, kun $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. (Teoria toimii, sillä (1):n kerroinmatriisi on jatkuva.)

**4.** *Etsi seuraavan* $2 \times 2$*-homogeenisysteemin yleinen ratkaisu* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

*Lyhyesti, onko vakioratkaisu* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *stabiili vai epästabiili tasapainotila?* Tässä ja seuraavissa tehtävissä käytetään merkintää $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

**Ratk.** Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Etsitään näitä $A$:n ominaisarvoja vastaavat $A$:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 - 3u_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = u_2$ ja siis $\iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -3u_1$ ja siis $\iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Siis $\mathbf{x}(t) = \underline{C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ on yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä.

Vakiofunktio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on systeemin triviaaliratkaisu, koska $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ eli koska $\mathbf{0}$ on systeemin *kriittinen piste*. Tällaista ratkaisua kutsutaan systeemin *tasapainoratkaisuksi*. Koska $\lambda_1 = 2 > 0$, on tämä tasapainokohta luentojen mukaan <u>epästabiili</u> (satulapiste, koska $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$). (Muita tasapainokohtia ei ole, sillä $\det A = -4 \neq 0$, joten $A\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

Osoitetaan suoraan, että tasapainokohta $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili. Kiinnitetään $\varepsilon = 1 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ kuinka pieni tahansa. Valitaan sellainen $a > 0$, jolla $a < \delta/\sqrt{2}$, ja asetetaan $\mathbf{x}_0 = a(1, 1)$; tällöin $|\mathbf{x}_0| < \delta$. Silloin $\mathbf{x}(t) = a\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\mathbf{x}_0$ $\forall t \geq 0$ on ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Nyt $|\mathbf{x}(t)| = e^{2t}|\mathbf{x}_0| \to \infty$, kun $t \to \infty$. Täten $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \geq \varepsilon$ jollain $t \geq 0$, vaikka siis oli $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}| < \delta$.

**5.** *Etsi seuraavan* $3 \times 3$*-homogeenisysteemin perusmatriisi* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

*Lyhyesti, onko vakioratkaisu* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *stabiili vai epästabiili tasapainotila?*

**Ratk.** Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$(3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ (jossa ensiksi lisättiin kolmas rivi ensimmäiseen riviin, sitten vähennettiin ensimmäinen sarake kolmannesta sarakkeesta, tämän jälkeen vähennettiin ensimmäinen rivi toisesta rivistä ja lopuksi lisättiin toinen sarake ensimmäiseen sarakkeeseen) juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -2$. Etsitään näitä $A$:n ominaisarvoja $\lambda$ vastaavat $A$:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda = 3$: $(A-3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 2u_3 \end{cases} \iff$
$\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$: $(A-I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 4u_3 \end{cases} \iff$
$\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja vähennettiin kolmas yhtälö toisesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -2$: $(A+2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_3 = u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa ensin lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön ja sitten jaettiin ensimmäinen ja toinen yhtälö 5:llä sekä vähennettiin nämä yhtälöt kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_3(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Täten systeemin perusmatriisi $\mathbb{R}$:ssä on

$$X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_3(t)\,] = \underline{\begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{t} & -e^{-2t} \\ 2e^{3t} & 4e^{t} & e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{t} & e^{-2t} \end{bmatrix}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Koska $\lambda_1 = 3 > 0$, on tasapainoratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ epästabiili (ja ainoa tasapainoratkaisu, sillä $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -6 \neq 0$).