Diff.yht. II, harjoitus 2, 15.–16.11.2011, ratkaisut (JL), 3 sivua

1. *Laske kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota alkuarvotehtävälle* $y' = \cos x,\ y(\pi) = 0$. *Huomaatko jotain erikoista, ja kuinka selität sen?*

Ratk. Olkoon $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$ ja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos x$. Tällöin $\underline{y_0(x)} = y_0 = \underline{0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{y_1(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt = \int_{\pi}^{x} \cos t\,dt = \Big/_{\pi}^{x} \sin t = \underline{\sin x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $\underline{y_2(x)} = 0 + \int_{\pi}^{x} f(t, y_1(t))\,dt = \int_{\pi}^{x} \cos t\,dt = \underline{\sin x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Siis $y_2 = y_1$. Näin täytyy ollakin, sillä $f(x,y) = \cos x$ riippuu vain x:stä, joten heti $y = y_1$ on AAT:n ja siis myös integraaliyhtälön $y(x) = 0 + \int_{\pi}^{x} f(t, y(t))\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tarkka ratkaisu, jolloin iteraatio ei tuota enää muutosta.

2. *Kahden kappaleen ongelman yhteydessä (planeetan kierto auringon ympäri) saatiin kiertolaisen vaihekulmafunktiolle* $\theta = \theta(t)$ *1. kl. separoituva DY*

$$\dot{\theta}(t) = c_1 \left(K{c_1}^{-2} + c\cos(\theta(t) - \delta)\right)^2,$$

jossa t *on aikamuuttuja ja* δ, c, c_1 *sekä* K *ovat vakioita. Osoita globaalin OY-lauseen* 4.6 *avulla, että DY:n (maksimaali)ratkaisu* θ *on määritelty koko* $\mathbb{R}$*:ssä. Kiertomalli antaa siis globaalin ratkaisun planeetan liikkeelle.*

Ohje. *Kaikki tapahtuu* (t,θ)*-tasossa. Alkuehdoksi voit olettaa* $\theta(0) = 0$ *(voisi olla mikä hyvänsä). Väliarvolause.*

Ratk. Vakioista tiedetään, että $K > 0$ ja $c > 0$. Merkitään $\varphi(\theta) = c_1 \left(K{c_1}^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\right)^2$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Tällöin, kun $(t,\theta) \in \mathbb{R}^2$, niin $f(t,\theta) = \varphi(\theta)$ riippuu vain θ:sta, ts. tutkittava separoituva yhtälö on *autonominen*, jolloin ajan alkuhetki voidaan valita miten tahansa; lisäksi kulma kiertotasossa voidaan yleisyyttä rajoittamatta mitata niin, että $\theta(0) = 0$.

Nyt

$$|D_2 f(t,\theta)| = |\varphi'(\theta)| = 2|c_1| \left|K{c_1}^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\right| \cdot c| - \sin(\theta - \delta)| \le 2c|c_1|(K{c_1}^{-2} + c) =: L \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Jos siis t, θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ja $\theta_1 < \theta_2$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in\ ]\theta_1, \theta_2[$, jolla

$$|f(t,\theta_1) - f(t,\theta_2)| = |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| = |\varphi'(\xi)||\theta_1 - \theta_2| \le L|\theta_1 - \theta_2|.$$

Täten f on muuttujan θ suhteen tasaisesti L-Lipschitz-jatkuva $\mathbb{R}^2$:ssa. Lisäksi f on jatkuva. Näin ollen globaalin OY-lauseen 4.6 oletukset ovat voimassa. Siis AAT:llä $\dot{\theta}(t) = f(t, \theta(t))$, $\theta(0) = 0$, on olemassa koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty yksikäsitteinen maksimaaliratkaisu $\theta = \theta(t)$.

3. *Sama tehtävä kuin* **2**, *mutta käytä nyt Poistumislausetta* 4.7.

Ohje. *Alkuehdoksi voit olettaa* $\theta(0) = 0$. *Yhtälöstä* $\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \dot{\theta}(\tau)\,d\tau$ *saadaan haarukka ratkaisulle. Kompakteiksi joukoiksi kasvava jono origokeskisiä neliöitä.*

Ratk. Olkoot φ ja f kuten **2**:n todistuksessa. Osoitetaan, että φ (ja tällöin siis myös f) on rajoitettu. Nyt $|\varphi(\theta)| \le M := |c_1|(K{c_1}^{-2} + c)^2$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ (itse asiassa $\sup\{|\varphi(\theta)| \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \max\{|\varphi(\theta)| \mid \theta \in [0, 2\pi\} < \infty$ kosinin 2π-jaksollisuuden ja φ:n jatkuvuuden tähden).

Poistuvuuslauseen oletukset ovat voimassa alueessa $D = \mathbb{R}^2$, sillä f ja $D_2 f$ ovat jatkuvia. Olkoon $\theta\colon \Delta \to \mathbb{R}$ AAT:n $\dot{\theta}(t) = f(t, \theta(t))$, $\theta(0) = 0$, yksikäsitteinen maksimaaliratkaisu, jolloin väli Δ on avoin: $\Delta = \,]a, b[$ $(-\infty \le a < 0 < b \le \infty)$.

Seuraava epäyhtälö on ratkaiseva. Kullakin $t \in \Delta$ on

$$|\theta(t)| = \left|\theta(0) + \int_0^t \dot{\theta}(\tau)\,d\tau\right| \le \left|\int_0^t |\dot{\theta}(\tau)|\,d\tau\right| = \left|\int_0^t |\varphi(\theta(\tau))|\,d\tau\right| \le \left|\int_0^t M\,d\tau\right| = M|t|.$$

Olkoon $\lambda > 0$ ja $Q = [-\lambda, \lambda] \times [-M\lambda, M\lambda]$. Tällöin poistuvuuslauseen nojalla on olemassa sellaiset $\alpha, \beta \in \Delta$, $a < \alpha < 0 < \beta < b$, että jos $a < t < \alpha$ tai $\beta < t < b$, niin $(t, \theta(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus Q$. Täten, jos $a < t < \alpha$ tai

$\beta < t < b$, niin $|t| > \lambda$ tai $|\theta(t)| > M\lambda$, jolloin jälkimmäisessä tapauksessa on $M|t| \geq |\theta(t)| > M\lambda$ ja siis tällöinkin $|t| > \lambda$. Näin ollen $a < -\lambda$ ja $b > \lambda$.

Siis, koska $\lambda > 0$ oli mielivaltainen, on oltava $a = -\infty$ ja $b = \infty$ eli $\Delta = \mathbb{R}$.

4. *Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen* 1. *kl. homogeenisysteemi:*

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

Ratk. Funktio $\mathbf{y}$ on tämän vektoriyhtälön ratkaisu jos ja vain jos

$$y_1'(x) = -2y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) \quad \text{ja} \tag{1}$$

$$y_2'(x) = 2y_1(x) - 2y_2(x). \tag{2}$$

Yhtälö (1) antaa

$$y_2(x) = 2y_1'(x) + 4y_1(x). \tag{3}$$

Derivoimalla yhtälö (1) puolittain (*vaara uusista, alkuperäistä yhtälöä toteuttamattomista ratkaisuista!*) ja sijoittamalla siihen sitten (2) ja (3) saadaan, että

$$y_1'' \overset{(1)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}y_2' \overset{(2)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_2) = -2y_1' + y_1 - y_2 \overset{(3)}{=} -2y_1' + y_1 - (2y_1' + 4y_1) = -4y_1' - 3y_1,$$

joten y_2 eliminoitui, ja

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0. \tag{4}$$

Kääntäen, jos y_1 on (4):n ratkaisu ja y_2 määräytyy (3):sta, niin (1) toteutuu, ja

$$y_2' \overset{(3)}{=} 2y_1'' + 4y_1' \overset{(4)}{=} 2(-4y_1' - 3y_1) + 4y_1' = -4y_1' - 6y_1 \overset{(1)}{=} -4(-2y_1 + \frac{1}{2}y_2) - 6y_1 = 2y_1 - 2y_2,$$

eli myös (2) toteutuu (*uusien ratkaisujen vaara vältetty!*). Riittää siis ratkaista ensin 2. kl. yhtälö (4) y_1:lle ja sitten 0. kl. yhtälö (3) y_2:lle.

Nyt vakiokertoimisen homogeeniyhtälön (4) karakteristisen yhtälön $r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3) = 0$ juuret ovat -1 ja -3, joten (4):n yleinen ratkaisu on $y_1(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Tällöin $y_1'(x) = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}$, joten sijoitus (3):een antaa $y_2(x) = 2(-c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}) + 4(c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}) = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Täten annetun homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} \\ 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x} \end{bmatrix} = c_1e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{-3x}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Huom. Implikaatiolle (1)&(2) $\Rightarrow$ (3)&(4) käänteisen implikaation (3)&(4) $\Rightarrow$ (1)&(2) yllä olevan tapaisen osoittamisen sijasta riittäisi jälkikäteen huomata ratkaisuavaruuksista $\mathbb{R}$:ssä, että tietysti $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} \subset \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$, että teorian nojalla $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\}$ on 2-ulotteinen vektoriavaruus ja että, kuten nähtiin, $\{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$ on korkeintaan 2-ulotteinen vektoriavaruus; tällöin nimittäin $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} = \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$.

5. *Palauta seuraavat skalaariyhtälöt* 1. *kl. systeemeiksi:*

(a) $y^{(3)} + \sin x\, y' + y = \cos x$,

(b) $y^{(4)} + x^2y'' + x^4y = \sin x$.

Ratk. (a) Olkoon y annetun kolmannen kertaluvun lineaarisen yhtälön ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$. Tällöin $y_1' = y' = y_2$, $y_2' = y'' = y_3$ ja $y_3' = y^{(3)} = -y - \sin x\, y' + \cos x =$

$-y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x$, joten $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ on välillä I seuraavan ensimmäisen kertaluvun lineaarisen systeemin ratkaisu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x. \end{cases} \iff \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\sin x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

jossa $\mathbf{b}(x) = (0, 0, \cos x)$. Kääntäen, jos $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ on tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $y = y_1$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu välillä I, sillä $y' = y_1' = y_2$, $y'' = y_2' = y_3$ ja siis $y^{(3)} = y_3' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x = -y - \sin x\, y' + \cos x$. Saatu systeemi on täten yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.

(b) Sijoittamalla toiseen suuntaan $y_i = y^{(i-1)}$, kun $i = 1, 2, 3, 4$, ja toiseen suuntaan $y = y_1$ saadaan

$$y^{(4)} + x^2 y'' + x^4 y = \sin x \iff \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -x^4 y_1 - x^2 y_3 + \sin x \end{cases} \iff \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x^4 & 0 & -x^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

jossa $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ja $\mathbf{b}(x) = (0, 0, 0, \sin x)$.

6. **(a)** *Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi* 1. *kl. systeemiksi:* $\begin{cases} \ddot{y} = f(t, x, y, \dot{y}) \\ \dot{x} = g(t, x, y) \end{cases}.$

(b) *Entä, jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin* $\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$*?*

Ratk. **(a)** Olkoon (x, y) tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $z_1 = x$, $z_2 = y$ ja $z_3 = \dot{y}$. Tällöin (z_1, z_2, z_3) on seuraavan normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu välillä I:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Kääntäen, jos (z_1, z_2, z_3) on tämän normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $(x, y) = (z_1, z_2)$ on alkuperäisen systeemin ratkaisu välillä I. Siis systeemit ovat yhtäpitävät.

(b) Toisen yhtälön $\dot{x} = g(t, x, y)$ nojalla ensimmäinen yhtälö $\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ voidaan kirjoittaa muotoon $\ddot{y} = f(t, x, y, g(t, x, y), \dot{y})$. Täten alkuperäisen systeemin kanssa yhtäpitävä normaalimuotoinen 1. kl. systeemi on nyt seuraava:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, g(t, z_1, z_2), z_3). \end{cases}$$