Diff.yht. II, harjoitus 1, 8.–9.11.2011, ratkaisut (JL), 2 sivua

1. *Ratkaise mukauttamalla lineaarista* 2. *kl. teoriaa seuraava lineaarinen* 4. *kl. homogeeniyhtälö:*

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$$

Ratk. Yhtälö on vakiokertoiminen, ja sen karakteristisen yhtälön

$$r^4 - 3r^2 - 4 = (r^2 - 4)(r^2 + 1) = (r - 2)(r + 2)(r^2 + 1) = 0$$

juuret ovat $r = 2$, $r = -2$ ja $r = \pm i$. Täten yhtälöllä on perusjärjestelmä

$$(e^{2x}, e^{-2x}, \cos x, \sin x)$$

ja siis yleinen ratkaisu

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}).$$

2. *Määrää kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle* $y' = -y$, $y(0) = 2$.

Ratk. Olkoon $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ ja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = -y$. Tällöin $\underline{y_0(x) = 2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))\,dt = 2 - \int_0^x y_n(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 1$. Siis $\underline{y_1(x)} = 2 - \int_0^x 2\,dt = \underline{2 - 2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $\underline{y_2(x)} = 2 - \int_0^x (2 - 2t)\,dt = \underline{2 - 2x + x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tarkalla ratkaisulla $y(x) = 2e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on 0-keskinen Taylorin sarja $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n/n! = 2(1 - x + x^2/2 - x^3/3! + \ldots) = 2 - 2x + x^2 - x^3/3 + \ldots$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Induktiolla voidaan osoittaa, että y_n on y:n 0-keskinen n-asteinen Taylorin polynomi kaikilla $n \geq 0$.

3. *Onko funktio* $f(x, y) = e^{x+y}$ *joukossa* $I \times J$ *tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan* y *suhteen, kun*

(a) $I = [0, 1]$ *ja* $J = [0, 1]$,

(b) $I = [0, 1]$ *ja* $J = \mathbb{R}$,

(c) $I = \mathbb{R}$ *ja* $J = [0, 1]$*?*

Muutaman sanan vastaus riittää, ei tarvitse todistaa.

Ratk. Vastoin, mitä pyydettiin, annetaanpa yksityiskohtaiset perustelut (jotta myöhemmin osattaisiin vastata nopeasti esittämättä tällaisia yksityiskohtaisia perusteluita!).

On siis tutkittava, päteekö jollakin $0 \leq M < \infty$ ehto

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{kaikilla } x \in I \text{ ja } y_1, y_2 \in J.$$

Tarvitaan Analyysi I:n *väliarvolause*: Jos $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a, b[$, niin $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a)$ jollain $\xi \in]a, b[$. Tällöin, jos on olemassa vakio $M \geq 0$, jolla $|\varphi'(t)| \leq M$ kaikilla $t \in]a, b[$, niin $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq M|s - t|$ kaikilla $s, t \in [a, b]$ eli φ on M-Lipschitz. Erityisesti, jos φ on jatkuvasti derivoituva välillä $[a, b]$, jolloin φ' on rajoitettu, niin φ on Lipschitz-jatkuva.

(a) Nyt, kun $x, y_1, y_2 \in [0, 1]$, niin

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |e^{x+y_1} - e^{x+y_2}| = e^x|e^{y_1} - e^{y_2}| \leq e|e^{y_1} - e^{y_2}| = ee^{\xi}|y_1 - y_2| \leq e^2|y_1 - y_2|$$

jollain $\xi \in [0, 1]$, joten <u>tasainen Lipschitz-ehto jälkimmäisen muuttujan suhteen pätee</u> vakiolla $M = e^2$.
Tai: Koska $D_2 f(x, y) = (\partial/\partial y)e^{x+y} = e^{x+y}$, niin $\sup_{(x,y)\in I\times J} |D_2 f(x, y)| = e^{1+1} = e^2$, josta väliarvolauseen nojalla seuraa ylläoleva tasainen Lipschitz-ehto.

(b) Nyt

$$\frac{|f(0, y) - f(0, 0)|}{|y - 0|} = \frac{e^y - 1}{y} \to \infty, \quad \text{kun } 0 < y \to \infty.$$

Tällöin tasainen Lipschitz-ehto muuttujan y suhteen ei voi pätea. (Se ei siis pätisi, vaikka olisi $I = \{0\}$.)
Tai: Jos f olisi tasaisesti M-Lipschitz muuttujan y suhteen jollain $M \geq 0$, ehdosta

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y)|}{|y_1 - y|} \leq M \quad \text{kaikilla } y_1 \in J,\ y_1 \neq y,$$

kun $x \in I$ ja $y \in J$, seuraisi rajalla $y_1 \to y$, että $|D_2 f(x,y)| \leq M$, kun $x \in I$ ja $y \in J$. Mutta $\sup_{(x,y)\in I\times J} |D_2 f(x,y)| \geq \lim_{y\to\infty} |D_2 f(0,y)| = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty$; ristiriita.

(c) Koska

$$\frac{|f(x,1) - f(x,0)|}{|1-0|} = e^{x+1} - e^x = e^x(e-1) \to \infty, \quad \text{kun } x \to \infty,$$

niin tasainen Lipschitz-ehto muuttujan y suhteen ei päde.
Tai: $\sup_{(x,y)\in I\times J} |D_2 f(x,y)| \geq \lim_{x\to\infty} |D_2 f(x,0)| = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, josta väite seuraa.

4. **(a)** *Missä $\mathbb{R}^2$:n alueissa DY $y' = \sqrt[3]{y-1}$ toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo.*

(b) *Osoita, että $f(x,y) = \sqrt[3]{y-1}$ ei ole esimerkiksi suorakaiteessa $K = [0,1] \times [0,1]$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.*

Ratk. **(a)** Funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y-1)^{1/3}$, kuten (b):ssä on jatkuva, ja

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{3}(y-1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$$

on määritelty ja jatkuva avoimissa puolitasoissa $D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$ ja $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$. Siis alueissa $D_\pm$ tutkittava DY toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 oletukset Lemman 4.2 nojalla. Koska $(\partial/\partial y) f(x,y) \to \infty$, kun $(x,y) \to (x,1)$ alueissa $D_\pm$ kullakin $x \in \mathbb{R}$, niin alueet $D_\pm$ ovat maksimaalisia tässä suhteessa.

Huom. Kullakin $x_0 \in \mathbb{R}$ on AAT:llä $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = 1$, esimerkiksi globaalit ratkaisut $y_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla $y_\pm(x) = 1$, kun $x \leq x_0$, ja $y_\pm(x) = 1 \pm \sqrt{(8/27)(x-x_0)^3}$, kun $x \geq x_0$; nämä ratkaisut eivät yhdy missään pisteen x_0 ympäristössä.

(b) Tämä seuraa siitä, ks. tehtävä **3**, että $\sup\{(\partial/\partial y) f(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\} = \infty$.

5. *Olkoon funktio y AAT:n*

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla, että y on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ohje. Väliarvolause.

Ratk. Olkoon $f(x,y) = e^x \sin x \cos y\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tällöin f on jatkuva, ja $(\partial/\partial y) f(x,y) = -e^x \sin x \sin y\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon $a > 0$. Jos $|x| \leq a$ ja $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 < y_2$, niin väliarvolauseen perusteella on olemassa $\eta \in]y_1, y_2[$, jolla

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x,\eta)(y_1 - y_2) \right| = e^x |\sin x| |\sin \eta| |y_1 - y_2| \leq e^a |y_1 - y_2|.$$

Täten f on suorakaiteessa $[-a,a] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva (nimittäin e^a-Lipschitz-jatkuva) muuttujan y suhteen. Siis globaalin OY-lauseen 4.6 oletukset ovat voimassa x:ää koskevalla välillä $I = \mathbb{R}$, joten AAT:n (maksimaalinen) ratkaisu y on (olemassa, yksikäsitteinen ja) määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.