PURTAVAA ENSIMMÄISTÄ KURSSIKOETTA VARTEN

Tässä harjoittelumateriaalia ensimmäistä kurssikoetta varten. Koealueena on siis karkeasti sanottuna kurssin alku - funktion raja-arvon määritelmän käyttö. Tämä tehtäväsarja yrittää antaa tarkempaa kuvaa tärkeistä asioista.

Kannattaa myös kerrata harjoitusten ja ohjausten tehtävät.

1. Kirjoita lukujonon raja-arvon määritelmä. Selitä se omin sanoin (ja kuvin).

2. Oletetaan, että $a < b$ ja $0 \leq x \leq 1$. Osoita, että $a \leq ax + b(1-x) \leq b$.

3. Todista, että $x^3 < x$ aina kun $0 < x < 1$.

4. Todista, että $x^2 < y^2$ aina kun $0 < x < y$.

5. Oletetaan, että $9 < x < 9 + 5^{-999}$. Osoita, että $\sqrt{x} - 3 < 5^{-1000}$.

6. Mitkä luvut toteuttavat molemmat epäyhtälöt $|x+1| < 2$ ja $|x-2| < 3$?

7. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|3x-2| < 1$?

8. Oletetaan, että $|x-e| < 10^{-1000}$ ja $|y-\pi| < 10^{-1000}$. Osoita, että $|xy - e\pi| < 10^{-999}$.

9. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella väite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+3} = 3$$
todeksi.

10. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella väite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+3} = 2$$
epätodeksi.

11. Oletetaan, että lukujono x_n toteuttaa ehdon $|x_n - a| < 1$ kaikilla n. Osoita, että on olemassa luku M, jolle $-M < x_n < M$ pitää paikkansa kaikilla n.

12. Oletetaan, että jonot (x_n) ja (y_n) suppenevat. Määritellään $z_n = \max(x_n, y_n)$. Osoita, että jono (z_n) suppenee.

13. Selvitä kurssin lauseiden avulla lukujonon raja-arvo, kun x_n on
$$\frac{6+n^3}{(n+1)(n^2-2)}$$
.

14. Oletetaan, että lukujonoilla (x_n) ja (y_n) on seuraavat ominaisuudet: kaikilla n pätee $|x_n| < 2$ ja $y_n \to 0$ kun $x_n \to \infty$. Todista, että jono $(x_n y_n)$ suppenee.

15. Monisteen sivun 25 alaosan esimerkki.

16. Oletetaan, että $x_1 > 0$ ja $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/n$ kaikilla n. Osoita, että jono (x_n) hajaantuu. Vihje: kirjoita palautuskaavan oikea puoli murtolausekkeen muotoon.

17. Oletetaan, että lukujono (x_n) on määritelty ehdoilla $x_1 = 1$ ja $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/3n^2$. Osoita, että jono suppenee. Voit esimerkiksi edetä seuraavasti.

    (1) Osoita, että jono on aidosti nouseva.

    (2) Osoita, että $x_n \leq 2 - 1/n$ kaikilla n.

    (3) Tee johtopäätökset.

18. Oletetaan, että $x_n \geq 0$ kaikilla n ja että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

19. Oletetaan, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

20. Oletetaan, että jono (x_n) on laskeva, jono (y_n) on nouseva, ja että $|x_n - y_n| \to 0$ kun $n \to \infty$. Osoita, että kaikilla n pätee $y_n \leq x_n$. Mitä tiedät jonojen suppenemisesta tai hajaantumisesta?

21. Tiedetään, että $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ kun $n \to \infty$. Entä miten käy lausekkeen $(1 + \frac{1}{3n})^n$?

22. Osoita, että
$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty,$$
kun $n \to \infty$.

23. Osoita, että
$$\frac{n}{3^{2n}} \to 0,$$
kun $n \to \infty$.

24. Oletetaan, että $A =]1,2[\cup]3,4[$. (Merkintä tarkoittaa kahden joukon yhdistettä: niitä pisteitä, jotka kuuluvat ainakin toiseen joukoista.) Mikä on $\sup A$? Mikä on $\inf A$?

25. Oletetaan, että $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mitä ovat $\sup A$ ja $\inf A$? Miksi ne ovat olemassa?

26. Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ylhäältä rajoitettuja reaalilkujoukkoja ja että $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että $\sup\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = a + b$.

27. (Jatkoa edelliseen) Oletetaan lisäksi, että joukkojen A ja B alkiot ovat positiivisia. Osoita, että $\sup\{xy \mid x \in A, y \in B\} = ab$.

28. Selvitä raja-arvon määritelmän perusteella
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$
Miksi voit olettaa, että $x \neq 2$?

29. Selvitä $\lim_{x\to 3} x^2$ ja perustele väitteesi raja-arvon määritelmän avulla.

30. Osoita raja-arvon määritelmän perusteella, että
$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2.$$