Analyysi I ja II lisämateriaalia

HAARUKOINTI

Tässä käsitellään kootusti sellaisia differentiaali- ja integraalilaskennan kurssin kysymyksiä, joissa joudutaan syventymään lukusuoran hienovaraisimpiin ominaisuuksiin. Siis eräitä asioita, joita syksyllä sivuutettiin luennolla odottamaan myöhempää pohtimista. Samaan kokonaisuuteen kuuluu myös jatkuvien funktioiden integroituvuuden taustalla oleva tasainen jatkuvuus.

Näille kysymyksille ovat yhteisiä seuraavat piirteet:

- niissä joudutaan menemään tosi syvälle reaalilukujen perusominaisuuksissa ja käyttämään supremumien ja infimumien olemassaoloa nokkelasti (siis sitä, mitä reaaliluvuista tiedetään enemmän kuin rationaaliluvuista)
- ne eivät pidä paikkaansa jos reaaliluvut korvataan rationaaliluvuilla;
- niiden todistamiseen on monta vaihtoehtoista lähestymistapaa, joista esim. Myrbergin kirjaan on valittu erilaiset kuin monisteeseen.

Seuraavassa nuo lauseet todistetaan käyttäen ideaa haarukoimisesta. Koulusta haarukoiminen on tuttu esim. funktion nollakohdan likiarvon määrittämisen yhteydestä. Mutta nyt ajatuksena on käyttää haarukointia tapana TODISTAA matemaattisia väitteitä.

Alla olevat todistukset on kirjoitettu hiukan viitteellisesti. Tarkoitus on, että jokainen lisää kynän ja paperin kanssa niin paljon yksityiskohtia, että päättelyt tulevat selviksi. Ja neuvoa saa kysyä luennoitsijalta.

Lemma 1 *Oletetaan, että* $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], I_3 = [a_3, b_3], \ldots$ *ovat sisäkkäisiä suljettuja välejä. Siis*

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le b_3 \le b_2 \le b_1.$$

Tällöin on olemassa reaalilukuja c, jotka kuuluvat jokaiselle välille $I_n = [a_n, b_n]$*. Toisin sanoen* $a_n \le c \le b_n$ *kaikilla n.*

Tämä tulos voidaan ilmaista myös sanomalla, että välien I_n leikkaus on epätyhjä

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$$

ja että reaaliluku c luuluu siihen

$$c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Todistus. Koska välit ovat sisäkkäisiä, jokainen oikeanpuoleinen päätepiste b_n on kaikkien vasemmanpuoleisten päätepiteitten a_i muodostaman joukon

$$A = \{a_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

yläraja. Siksi on olemassa tämän joukon supremum $\sup A = c$. Nyt ensinnäkin $a_n \leq c$ kaikilla indekseillä n, koska c on joukon A yläraja. Toisaalta koska c on joukon A ylärajoista pienin ja jokainen b_n on joukon A yläraja, tiedämme myös, että $c \leq b_n$ kaikilla n. Siis kaikilla n pätee $a_n \leq c \leq b_n$ ja siksi c kuuluu kaikille väleille $I_n = [a_n, b_n]$. **M.O.T.**

Lemma 2 *(Jatkoa edelliseen.) Oletetaan lisäksi, että $b_n - a_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Tällöin välien $I_n = [a_n, b_n]$ leikkaus sisältää täsmälleen yhden pisteen.*

Todistus. Jos $c < d$ olisivat kaksi eri pistettä, jotka kuuluvat kaikkiin väleihin $I_n = [a_n, b_n]$, niin kaikilla n olisi oltava $a_n \leq c < d \leq b_n$. Tällöin erotus $b_n - a_n$ olisi aina vähintään positiivinen vakio $d - c$. Toisin sanoen ei voisi olla, että $b_n - a_n \to 0$ kun $n \to \infty$. **M.O.T.**

Edellä olevat tulokset edellyttävät, että tarkastellaan suljettuja välejä. Sisäkkäisten avoimien välien leikkaus voi olla tyhjä. Esimerkiksi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]0, \frac{1}{i}[= \emptyset.$$

Tarkoituksena on soveltaa edellisiä lemmoja differentiaalilaskennan vaikeiden lauseiden todistamiseen. Aluksi haetaan kuitenkin tuntumaa käytettävästä haarukointiajattelusta todistamalla Bolzanon lause. Tälle lauseelle on esitetty suoremmin supremumien olemassaoloon perustuva ja siinä mielessä parempi todistus sekä monisteessa että Myrbergin kirjassa. Seuraavassa todistuksessa on kuitenkin hauskaa se, että siinä nollakohdan likiarvojen määrittäminen haarukoimalla muuttuukin nollakohdan olemassaolon todistukseksi.

Lause 3 *Oletetaan, että* $f : [a, b] \to R$ *on jatkuva ja, että* $f(a) < 0$ *ja* $f(b) > 0$. *Tällöin on olemassa piste* $c \in [a, b]$, *jolle pätee* $f(c) = 0$.

Todistus. Edetään aivan kuten koulussa haarukoiden. Merkitään $I_1 = [a, b]$. Jos I on välin $[a, b]$ suljettu osaväli, niin merkinnällä $P(I)$ tarkoitetaan, että funktion f arvo välin I vasemmassa päätepisteessä on negatiivinen ja oikeassa päätepisteessä on positiivinen.

Merkinnällä I_v tarkoitetaan välin I vasenta puolikasta ja merkinnällä I_o sen oikeaa puolikasta. Siis esimerkiksi $[0, 1]_v = [0, \frac{1}{2}]$ ja $[0, 1]_o = [\frac{1}{2}, 1]$.

Pohditaan arvoa $f(x)$ missä $x = \frac{1}{2}(a + b)$ on välin $[a, b]$ keskipiste. Jos sattumalta olisi $f(x) = 0$, niin väite olisi todistettu. Voidaan siis olettaa, että $f(x) > 0$ tai $f(x) < 0$. Edellisessä tapauksessa välin $I_1 = [a, b]$ vasemmalla puolikkaalla $I = I_{1,v} = [a, x]$ ja jälkimmäisessä tapauksessa välin $I_1 = [a, b]$ oikealla puolikkaalla $I = I_{1,o} = [x, b]$ on ominaisuus $P(I)$.

Sovitaan nyt, että edellisessä tapauksessa I_2 on $I_{1,v}$ ja jälkimmäisessä tapauksessa I_2 on $I_{1,o}$.

Tällöin I_2 on välin I_1 suljettu osaväli, jonka pituus on puolet välin I_1 pituudesta. Lisäksi pätee, että $P(I_2)$.

Seuraavaksi tarkastellaan aivan samoin välin I_2 puolikkaita ja valitaan väli I_3 olemaan välin I_2 vasen tai oikea puolikas $I_{2,v}$ tai $I_{2,o}$ nin, että ehto $P(I_3)$ pätee.

Jatkamalla tätä joko

- kohdataan jossain vaiheessa tarkasteltavan osavälin keskipiste, jossa f saa arvon 0;
- tai sitten saadaan jono sisäkkäisiä välejä $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], I_3 = [a_3, b_3], \ldots$ missä kaikilla n pätee $f(a_n) < 0$ ja $f(b_n) > 0$.

Jälkimmäisessä tapauksessa seuraavan välin pituus on aina puolet edellisen pituudesta.

Lemmojen 1 ja 2 perusteella näillä väleillä on täsmälleen yksi yhteinen piste c.

Koska nyt $\lim a_n = c$, on $\lim f(a_n) = f(c)$. Siksi $f(c) \leq 0$ koska $f(a_n) < 0$ kaikilla n.

Koska myös $\lim b_n = c$, on $\lim f(b_n) = f(c)$. Siksi $f(c) \geq 0$ koska $f(a_n) > 0$ kaikilla n.

Siis on oltava $f(c) = 0$.

M.O.T.

Haarukoinnilla tarkoitetaan tässä tarinassa edellisen kaltaisia päättelyitä, joissa

1. tutkittava ongelma muotoillaan sopivan suljettujen välien ominaisuuden muotoon;

2. huomataan, että välistä voidaan siirtyä aina sen jompaan kumpaan puolikkaaseen, jolla on edelleen sama ominaisuus;

3. muodostetaan laskeva jono suljettuja välejä toistamalla tätä havaintoa;

4. ja lopuksi sovelletaan todistettavan lauseen oletuksia siihen ainoaan pisteeseen, joka kuuluu kaikille näin muodostetuille väleille.

Olemme valmiit todistamaan jännittävämpia tuloksia.

Lause 4 *Oletetaan, että $f : [a, b] \to R$ on jatkuva. Tällöin f on rajoitettu välillä $[a, b]$. (Toisin sanoen on olemassa reaaliluvut M ja N, joille pätee $M < f(x) < N$ kaikilla $x \in [a, b]$.)*

Todistus. Oletetaan, ettei tällaisia lukuja M ja N ole. Tarkastellaan tapausta, jossa lukua N ei ole; toinen tapaus on aivan samanlainen.

Oletetaan siis, että f on ylhäältä rajoittamaton välillä $[a, b]$. Tehdään tästä välin ominaisuus: sanotaan, että välin $[a, b]$ suljetulla osavalillä on ominaisuus $P(I)$, jos f on ylhäältä rajoittamaton välillä I.

Huomataan, että jos $P(I)$ eli f on ylhäältä rajoittamaton välillä I, niin $P(I_v)$ tai $P(I_o)$ eli f on ylhäältä rajoittamaton välin I vasemmalla tai oikealla puolikkaalla.

Jos nimittäin N' olisi yläraja vasemmalla puolikkaalla ja N'' olisi yläraja oikealla puolikkaalla, niin suurempi näistä luvuista $N = \max(N', N'')$ olisi tietysti funktion f yläraja koko välillä I.

Tämä havainto merkitsee, että on olemassa jono $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$ välin $I_1 = [a, b]$ sisäkkäisiä suljettuja välejä, missä kaikilla n pätee, että $P(I_n)$ (eli että f on rajoittamaton välillä I_n), ja että väli I_{n+1} on aina välin I_n toinen puolikas $I_{n,v}$ tai $I_{n,o}$.

Tästä seuraa lemmojen 1 ja 2 nojalla, että on olemassa täsmälleen yksi reaaliluku c, joka kuuluu kaikille väleille I_n.

Nyt tiedetään, että piste c kuuluu kuinka tahansa lyhyille väleille, joilla f on rajoittamaton. Mutta toisaalta funktio f on jatkuva kohdassa c, mistä seuraa, että arvo $f(x)$ on varsin lähellä arvoa $f(c)$ kunhan x on riittävän lähellä pistettä c. Tämä vaikuttaa ristiriidalta, ja siitä seuraisi, että tekemämme vastaoletus olisi väärä. Toisin sanoen funktiolla f täytyisi olla olemassa yläraja välillä $[a, b]$.

Meidän riittää siis tehdä edellä olevasta ristiriitapäättelystä täsmällinen. Lähdetään siitä, että funktio f on jatkuva kohdassa c. Käytetään jatkuvuuden (siis oikeastaan funktion raja-arvon) määritelmää. Mikä tahansa luvun ϵ arvo kelpaisi nyt meille. Käytetään arvoa $\epsilon = 1$. Nyt on olemassa sellainen positiivinen δ, että aina kun $|x - c| < \delta$, niin

$$|f(x) - f(c)| < 1.$$

Tämä antaa meille tiedon

$$-1 < f(x) - f(c) < 1$$

ja edelleen tiedon

$$f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1,$$

kaikille x, jotka kuuluvat avoimelle välille $]c - \delta, c + \delta[$. Tiedämme siis, että f on ylhäältä rajoitettu avoimella välillä $]c - \delta, c + \delta[$.

Seuraavaksi etsitään riittävän lyhyt väli $I_n = [a_n, b_n]$. Koska $b_n - a_n \to 0$, niin on olemassa n, jolle $b_n - a_n < \delta$. Koska piste c kuuluu kaikille näille väleille, tiedetään, että $c \in [a_n, b_n]$ eli $a_n \leq c \leq b_n$. Tästä seuraa, että $c - \delta < a_n < b_n < c + \delta$, koska $b_n - a_n < \delta$. Toisin sanoen suljettu väli $I_n = [a_n, b_n]$ on avoimen välin $]c - \delta, c + \delta[$ osaväli (osajoukko). Tämä on ristiriita, koska toisaalta tiedetään, että f on ylhäältä rajoitettu avoimella välillä $]c - \delta, c + \delta[$ ja toisaalta se on ylhäältä rajoittamaton tämän osavalillä $I_n = [a_n, b_n]$.

M.O.T.

Tämän lauseen avulla voidaan sitten todistaa tärkeämpi tulos, jota monisteessa kutsutaan Weierstrassin min-max lauseeksi: suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvon. Tulos voidaan todistaa toistamalla edellä olevaa haarukoinnin ideaa tai sitten näppärämmin Myrbergin kirjan tapaan suoraan edellisen lauseen seurauksena tutkimalla (suurimman arvon tapauksessa) apufunktiota

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)}$$

missä S on funktion f arvojen joukon $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ supremum – se on olemassa edellisen lauseen nojalla. Funktio g on määritelty ja jatkuva, jos f EI saa suurinta arvoa.

On tunnettua, että funktion derivaatan positiivisuudesta seuraa kasvavuus. Yleensä tämä todistetaan nykyään väliarvolauseen avulla. Mutta Matti Lehtinen huomautti taannoin, että kasvavuustulos on vanhempi kuin väliarvolause. Siksi on mielenkiintoista katsoa, miten kasvavuus on todistettavissa ilman väliarvolausetta. Lauseen jälkimmäisen kohdan todistus perustuu Eero Saksmannin ehdotukseen.

Lause 5 *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$.*
(1) Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.
(2) Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$.

Todistus. Lauseen jälkimmäinen kohta seuraa edellisestä kun edellistä sovelletaan funktioihin $f(x) + \alpha x$ kaikilla $\alpha > 0$. (Harjoitustehtävä.)

Edellisessä kohdassa riittää jatkuvuuden nojalla osoittaa, että f on aidosti kasvava avoimella välillä $]a, b[$.

Oletetaan sitten, että $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, mutta $a < c < d < b$ ja $f(c) \geq f(d)$. Tarkastellaan välin $[c, d]$ osavälien ominaisuutta: funktion f arvo vasemmassa päätepisteessä on vähintään yhtä suuri kuin oikeassa. Tämäkin siirtyy aina väliltä sen vasemmalle tai oikealle puolikkaalle. Edellisen esimerkkien tapaan syntyy laskeva jono suljettuja välejä, joilla on tämä ominaisuus.

Tästä seuraa, etta on olemassa piste x_0, joka kuuluu jokaiseen jonon väliin. Tilanteesta seuraa derivaattalemman (monisteen 8.1) nojalla helposti ristiita sen kanssa, että $f'(x_0) > 0$.

M.O.T.

Edellisen lauseen ensimmist kohtaa voi vahvistaa (tutulla tavalla) jlkimmisen avulla. Jos $f' \geq 0$, niin yllä olevan nojalla f on kasvava. Jos f ei ole aidosti kasvava, niin on olemassa $c < d$ joilla $f(c) = f(d)$. Tällöin derivaatan määritelmän nojalla $f' = 0$ välillä $]c, d[$.

Sama ilmaistuna toisin päin: jos $f' \geq 0$ niin f on aidosti kasvava, jos $f' = 0$ ei päde millään aidolla välillä.

Seuraavaksi olisi luonnollisinta edetä jatkuvien funktioitten ominaisuuksien kanssa ja todistaa jatkuvan funktion Riemann-integroituvuuden todistamisessa tarvittava tieto, että suljetulla välillä jatkuva funktio on sillä tasaisesti jatkuva. Tähän palaamme lauseessa 14.

Tämä edellyttää kuitenkin haarukoinnin idean pientä muunnelmaa ja siksi siihen ja tasaisen jatkuvuuden käsitteeseen palataan tuonnempana. Siksi etenemmekin seuraavaksi monisteen alkuosaan liittyviin tuloksiin.

Lause 6 *(Bolzano-Weierstrassin lause) Oletetaan, että $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on jono välin $[a, b]$ lukuja. Tällöin sillä on olemassa osajono, joka suppenee kohti jotain lukua $c \in [a, b]$.*

(Toisin sanoen: jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.)

Todistus. Nyt haarukoinnilla on helppo saada lisätietoa siitä, missä luvut x_n sijaitsevat. Merkitään $P(I)$ ominaisuutta, että on olemassa äärettömän monta indeksiä (lukua) n, joilla pätee $x_n \in I$. Oletuksen nojalla tiedetään siis, että $P([a, b])$.

Lisäksi jos $P(I)$, niin on on oltava $P(I_v)$ tai $P(I_o)$. Jos nimittäin $x_n \in I_v$ ja $x_n \in I_o$ vain äärellisen monella n, niin myös $x_n \in I$ on mahdollista vain äärellisen monella n.

Kuten aikaisemmissa todistuksissamme saamme jonon $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$ välin $I_1 = [a, b]$ sisäkkäisiä suljettuja välejä. Taas kaikilla n pätee, että $P(I_n)$, ja että väli I_{n+1} on aina välin I_n jompi kumpi puolikas $I_{n,v}$ tai $I_{n,o}$.

Siksi taas on olemassa yksikäsitteinen piste $c \in [a, b]$, joka kuuluu kaikkiin väleihin I_n.

Lauseessa vaadittu jonon $x_1, x_2, x_3, \ldots$ osajono saadaan poimimalla jäseniä väleiltä I_n. Tarkemmin sanoen tehdään seuraavasti. Ensin $y_1 = x_1$. Merkitään $k_1 = 1$, joten $y_1 = x_{k_1}$. Sitten k_2 on mikä tahansa sellainen indeksi, että $k_2 > k_1$ ja $y_2 = x_{k_2}$ kuuluu välille I_2.

Seuraavaksi k_3 on mikä tahansa sellainen indeksi, että $k_3 > k_2$ ja $y_3 = x_{k_3}$ kuuluu välille I_3. Näin voidaan jatkaa loputtomiin.

Koska välien I_n pituudet vähenevät rajatta ja koska piste c kuuluu näille kaikille, on helppo osoittaa, että $y_n \to c$.

M.O.T.

Edellinen lause esitetään toisinaan seuraavassa muodossa: jokaisella äärettömällä rajoitetulla joukolla A on kasaantumispiste. (Joukon kasaantumispiste on piste c, jota kohden suppenee sellainen jono $x_1, x_2, x_3, \dots$ joukon A alkioita, että $x_n \neq c$ kaikilla n.)

Tämä seuraa edellisestä, jos valitaan (äärettömyyden nojalla) mikä tahansa jono $x_1, x_2, x_3, \dots$ tutkittavan joukon toisistaan eroavia alkioita. Suppenevan osajonon raja-arvo on kaivattu kasaantumispiste.

Edellisen lauseen avulla voi todistaa helposti monia monisteen I-osan tuloksia.

Seuraus 7 *Jokaisella lukujonolla on monotoninen osajono.*

Todistus. (Tiivistelmä.) (Lause on todistettu monisteessa suoralla kombinatorisella päättelyllä.)

Jos jono ei ole ylhäältä rajoitettu, niin sillä on rajatta kasvava osajono. Sellaisesta on helppo poimia aidosti kasvava osajono.

Jos jono ei ole alhaalta rajoitettu, niin sillä on rajatta vähenevä osajono. Sellaisesta on helppo poimia aidosti vähenevä osajono.

Jos jono on rajoitettu, niin lauseen 5 nojalla sillä on suppeneva osajono. Jokaisesta suppenevasta jonosta voidaan varsin helposti poimia monotoninen osajono (– tämä vaatii vähän miettimistä ...) **M.O.T.**

Seuraus 8 *Jokainen Cauchy-jono (ts. Cauchyn ehdon toteuttava jono) suppenee.*

Todistus. Cauchyn ehdosta seuraa helposti, että jokainen Cauchy-jono on rajoitettu. Siksi Lauseen 5 nojalla jokaisella Cauchy-jonolla on suppeneva osajono. Mutta Cauchyn ehdosta seuraa helposti, että koko jono suppenee kohti samaa raja-arvoa. (Katso monistetta!) **M.O.T.**

Tässä tarinassa on tarkoitus tuoda esille sitä, että haarukointi tarjoaa (kirjoittajan mielestä) yhden helposti ajateltavissa olevan tavan todistaa differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisimpia tuloksia. Se ei estä mainostamasta muita samaan pystyviä "yleistyökaluja". Yhden tällaisen tarjoavat lukujonot liitettynä lauseseen 5. Esimerkiksi monisteen sivulla 42 on todistettu juuri tällä menetelmällä se, että jatkuva funktio on suljetulla välillä rajoitettu. Käydään seruaavassa esimerkissä lyhyesti läpi tuon monisteen todistuksen idea.

Esimerkki 9 Oletetaan siis, että $f : [a, b] \to R$ on jatkuva. Osoitetaan, että f on ylhäältä rajoitettu välillä $[a, b]$. (Samalla tavalla todistetaan, että se on myös alhaalta rajoitettu, ja oikeastaan samalla vaivalla todistetaan monisteessa suoraan, että se on rajoitettu eli $|f|$ on ylhäältä rajoitettu; tässä puhutaan ylhäältä rajoittuneisuudesta vain asian tekemiseksi hivenen konkreettisemman oloiseksi.)

Tehdään vastaoletus, että f on ylhäältä rajoittamaton välillä $[a, b]$. Tällöin kaikilla luonnollisilla luvuilla n on olemassa piste x_n, jolle pätee $f(x_n) > n$.

Lauseen 5 nojalla jonolla $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on olemassa osajono $y_1, y_2, y_3, \ldots$, joka suppenee kohti erästä pistettä $x_0 \in [a, b]$. Tällä pisteellä x_0 on sama rooli kuin haarukointipäättelyissä esiintyvällä "pisteellä c". Toisin sanoen, vastaoletuksen kuolinkouristukset keskittyvät sinne.

Huomataan ensin, että jokainen y_k on jokin x_{n_k}. Lisäksi kaikilla k pätee $n_k \geq k$. Siksi

$$f(y_k) = f(x_{n_k}) \geq k.$$

Nyt tiedämme toisaalta, että funktion f on jatkuvuuden perusteella oltava rajoitettu pisteen x_0 lähistöllä. Toisaalta pisteen x_0 lähelle on pakkautunut pisteitä, joiden kohdalla "f saa kuinka tahansa suuria arvoja". Seuraavaksi muotoillaan tämä täsmällisesti ristiriidaksi.

Koska f on jatkuva kohdassa x_0, on olemassa positiivinen δ, jolla avoin väli $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ sisältyy väliin $[a, b]$ ja jolla $|f(x) - f(x_0)| < 1$ kaikille $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Siis

$$-1 < f(x) - f(x_0) < 1$$

eli

$$f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$$

kaikille $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Mutta koska $y_k \to x_0$, pätee $y_k \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ aina kun k on kyllin suuri (eli suurempi kuin eräs kynnysindeksi k_δ.) Tästä saadaan ristiriita, kun valitaan indeksi $k \geq f(x_0) + 1$.

Myrbergin kirjassa käytetään yleistyökaluna paljon abstraktimpaa ajatustapaa, joka liittyy ns. avoimiin peitteisiin. Tästä pari sanaa, koska haarukointi tepsii senkin taustalla olevaan perustietoon.

Seuraavassa suljetun välin $[a, b]$ *avoin peite* on sellainen joukon I alkioilla i indeksöity kokoelma avoimia välejä $]c_i, d_i[$, jolle pitää paikkansa, että kaikilla $x \in [a, b]$ on olemassa joku (mahdollisesti useita) indeksi $i \in I$, jolla $x \in]c_i, d_i[$. Toisin sanoen, välit $]c_i, d_i[$ peittävät yhdessä suljetun välin $[a, b]$.

Ennen kuin edetään, tarkastellaan yhtä tärkeää esimerkkiä avoimen peitteen käsitteestä.

Esimerkki 10 Oletetaan, että $f : [a, b] \to R$ on jatkuva. Sovelletaan jatkuvuuden määritelmää kaikkialla epsilonin arvoon 1. Tällöin kaikilla $x \in [a, b]$ on olemassa positiivinen luku δ_x, jolle kaikilla pisteillä y pätee: jos $y \in]x - \delta_x, x + \delta_x[$, niin $|f(y) - f(x)| < 1$. (Voimme edellä tarvittaessa pienentää lukua δ_x niin, että koko väli $]x - \delta_x, x + \delta_x[$ sisältyy suljettuun väliin $[a, b]$.)

Nyt pisteillä $x \in [a, b]$ indeksöity suljettujen välien $]x - \delta_x, x + \delta_x[$ perhe muodostaa välin $[a, b]$ avoimen peitteen.

Jos katsoo Myrbergin kirjaa, löytää sieltä jonkin verran yleisemmän käsitteen. Siellä avoimien välien $]c_i, d_i[$ asemesta puhutaan avoimista joukoista A_i. (Avoimista joukoista ei puhuta nykyään tällä kurssilla.)

Mutta avoimen joukon määritelmästä seuraisi, että avoin joukko on eräiden avoimien välien yhdiste. Siksi seuraava lause on todellisuudessa vaikkei näennäisesti yhtä voimakas kuin Myrbergin kirjassa esitetty saman niminen tulos.

Lause 11 *(Heine-Borelin lause) Jos joukon I alkioilla i indeksöity kokoelma avoimia välejä $]c_i, d_i[$ muodostaa suljetun välin $[a, b]$ avoimen peitteen, niin on olemassa sellaiset äärellisen monta indeksiä $i_1, \ldots, i_n$, että jo avoimet välit $]c_{i_1}, d_{i_1}[, \ldots,]c_{i_n}, d_{i_n}[$ muodostavat suljetun välin $[a, b]$ avoimen peitteen.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, ettei välien $]c_i, d_i[$ muodostamalla peitteellä ole äärellistä osapeitettä. Johdetaan tästä ristiriita haarukoimalla.

Vastaoletuksen mukaan mitkään äärellisen monta väleistä $]c_i, d_i[$ eivät yhdessä peitä koko väliä $[a, b]$. Ajatellaan tätä tilannetta välin $[a, b]$ suljettujen osavälien ominaisuutena. Oletetaan, että I on välin $[a, b]$ suljettu osaväli.

Merkitään $P(I)$, jos mitkään äärellisen monta väleistä $]c_i, d_i[$ eivät yhdessä peitä koko väliä I. Siis vastaoletuksen perusteella $P(I)$.

Taas on helppo huomata, että jos $P(I)$, niin joko $P(I_v)$ tai $P(I_o)$. Jos nimittäin välin I molemmat puolikkaat voisi peittää äärellisen monella muotoa $]c_i, d_i[$ olevalla avoimella välillä, niin silloin tietysti myös koko välinkin voisi peittää: kootaan yhteen ne äärellisen monta avointa väliä $]c_i, d_i[$, joilla voidaan peittää vasen puoli ja ne, joilla voidaan peittää oikea puoli. Kootut äärellisen monta avointa väliä peittävät koko välin I.

Kuten aikaisemmissa päättelyissämme, saamme sisäkkäisten suljettujen välien jonon $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$. Taas $I_1 = [a, b]$ ja taas kaikilla n pätee, että $P(I_n)$ ja edelleen, että väli I_{n+1} on aina välin I_n jompi kumpi puolikas $I_{n,v}$ tai $I_{n,o}$.

Siksi jälleen kerran on olemassa yksikäsitteinen piste $c \in [a, b]$, joka kuuluu kaikkiin väleihin I_n. Koska $c \in [a, b]$, on olemassa $i_0 \in I$, jolle $c \in]c_{i_0}, d_{i_0}[$.

Päädymme ristiriitaan valitsemalla kyllin lyhyen välin I_n. Tarkemmin sanoen toimitaan seuraavasti. Merkitään $r = \min(c - c_{i_0}, d_{i_0} - c)$. Koska sisäkkäisten suljettujen väliemme pituudet vähenevät rajatta, on olemassa I_n, jonka pituus on pienempi kuin r.

Tällaisen välin I_n on kokonaisuudessaan sisällyttävä avoimelle välille $]c_{i_0}, d_{i_0}[$. Tosin sanoen väli $]c_{i_0}, d_{i_0}[$ peittää sen yksinään. Mutta toisaalta tiedämme, että $P(I_n)$ eli ettei väliä I_n voi peittää äärellisen monella välillä $]c_i, d_i[$. Olemme saaneet ristiriidan.

M.O.T.

Tämäkään lause ei pidä paikkaansa, jos suljettu väli korvataan avoimella välillä. Esimerkiksi välit $]\frac{1}{n}, 1[$ muodostavat välin $]0, 1[$ avoimen peitteen, jolla ei ole äärellistä osapeitettä.

Esimerkki 12 Jatketaan esimerkkiä 8. Jos sovelletaan Heine-Borelin lausetta Esimerkin 8 peitteeseen, niin saadaan äärellisen monta välin $[a, b]$ pistettä $x_1, \ldots, x_n$, joita vastaavat välit

$$]x_1 - \delta_{x_1}, x + \delta_{x_1}[, \ldots,]x_n - \delta_{x_n}, x + \delta_{x_n}[$$

peittävät koko suljetun välin $[a, b]$. Kun muistetaan, miten välit $]x-\delta_x, x+\delta_x[$ valittiin, huomataan, että pisteet $x_1, \ldots, x_n$ tavallaan kontrolloivat funktion f kulkua välillä $[a, b]$. (Piirrä kuva!)

Nyt on helppo johtaa harjoitustehtävänä tieto, että f on rajoitettu välillä $[a, b]$ (vetoamatta lauseeseen 4).

Nyt palataan jatkuvien funktioitten perusominaisuuksiin ja aikaisemmin luvattuun jatkuvien funktioiden integroituvuuteen tarvittavaan lisätietoon.

Funktio $f : [a, b] \to R$ on *tasaisesti jatkuva* välillä $[a, b]$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ pitää paikkansa aina kun $x, y \in [a, b]$ ja $|x - y| < \delta$.

Tasainen jatkuvuus eroaa toisin sanoen jatkuvuudesta siinä, että lukua ϵ vastaava "pieni etäisyys" δ ei riipu siitä, mitä kohtaa väliä $[a, b]$ tarkastellaan.

Esimerkki 13 Funktio $f :]0, 1[\to R$ määritellään yhtälöllä $f(x) = \frac{1}{x}$. Se on jatkuva muttei tasaisesti jatkuva.

Seuraavan lauseen todistuksessa käytetään taas haarukointia. Mutta koska lauseessa pohditaan kahteen pisteeseen x ja y liittyvää tilannetta, joudumme muuttamaan hiukan haarukointimenettelyämme.

Lause 14 *Oletetaan, että $f : [a, b] \to R$ on jatkuva. Tällöin se on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Lähdetään taas liikkeelle vastaoletuksesta. Oletetaan siis, että ϵ on sellainen positiivinen luku, ettei mikään positiivinen δ toteuta edellä esitettyä tasaisen jatkuvuuden määritelmää.

Tehdään tästä taas välin ominaisuus: sanotaan, että välin $[a, b]$ suljetulla osavälillä I on ominaisuus $P(I)$, jos mikään positiivinen δ ei toteuta välillä I tasaisen jatkuvuuden ehtoa luvulle ϵ. Ominaisuus $P(I)$ tarkoittaa siis, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa pisteet $x, y \in I$ joille $|x - y| < \delta$ ja $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Vastaoletuksen nojalla tiedetään, että $P(I)$.

Jos nyt suorittaisimme haarukointia aikaisemmalla tavalla, voisi käydä, että "hankalista pisteistä" x ja y toinen olisi aina välin vasemmassa ja toinen oikeassa puolikkaassa. Tämä hankaluus hoidetaan helposti muuttamalla välin vasemman ja oikean osan määritelmää.

Jos I on suljettu väli, niin (tämän todistuksen ajan) I_v ja I_o ovat välin I vasen ja oikea $\frac{2}{3}$-osa, jonka pituus on siis $\frac{2}{3}$ välin I pituudesta. Esimerkiksi $[0, 1]_v = [0, \frac{2}{3}]$ ja $[0, 1]_o = [\frac{1}{3}, 1]$.

Nyt on helppo osoittaa, että jos I on välin $[a, b]$ suljettu osaväli ja jos $P(I)$, niin $P(I_v)$ tai $P(I_o)$.

Todistamme tämän väitteen. Jos nimittäin kummallakaan välillä I_v ja I_o ei olisi ominaisuutta P, niin olisi olemassa sellaiset positiiviset luvut δ_v ja δ_o, että

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

pitää paikkansa aina kun

$$x, y \in I_v \text{ ja } |x - y| < \delta_v$$

ja aina kun

$$x, y \in I_o \text{ ja } |x - y| < \delta_o.$$

Nyt on helppo löytää yksi kynnysetäisyys δ, joka soveltuu koko välille I. Valitaan

$$\delta = \min(\delta_v, \delta_o, \frac{1}{3}\text{välin}[a, b]\text{pituus}).$$

Jos nyt $|x - y| < \delta$, niin $|x - y| < \delta_v$, $|x - y| < \delta_o$ ja pisteiden x ja y on oltava samassa puolikkaassa I_v tai I_o. Siksi $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ eikä $P(I)$ voisi päteä. Väite on siis todistettu.

Nyt voimme jatkaa aikaisempien haarukointitodistusten tapaan. Saamme siis jonon $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$ välin $I_1 = [a, b]$ sisäkkäisiä suljettuja osavälejä. Taas kaikilla n pätee, että $P(I_n)$, ja että väli I_{n+1} on aina välin I_n jompi kumpi osa $I_{n,v}$ tai $I_{n,o}$.

Siksi taas on olemassa yksikäsitteinen piste $c \in [a, b]$, joka kuuluu kaikkiin väleihin I_n.

Kuten lukija arvaa, saamme taas ristiriidan soveltamalla funktion f jatkuvuutta kohdassa c. Jatkuvuuden nojalla lähellä pistettä c saadut arvot ovat lähellä arvoa $f(c)$. Mutta meitä kiinnostaa se, miten lähellä toisiaan nämä arvot ovat. Tarkemmin sanoen haluamme ristiriidan sen kanssa, että kaksi tällaisessa pisteessä saatua arvoa voisi olla vähintään luvun ϵ päässä toisistaan.

Tästä syystä sovellamme jatkuvuuden määritelmää lukuun $\frac{\epsilon}{2}$ ja käytämme kolmioepäyhtälöä kahden eri arvon vertaamiseksi toisiinsa.

Jatkuvuuden nojalla on olemassa positiivinen luku δ, jolle avoin väli $]c - \delta, c + \delta[$ sisältyy suljettuun väliin $[a, b]$ ja jolle kaikilla $x \in]c - \delta, c + \delta[$ pätee $|f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$. Kolmioepäyhtälöstä seuraa nyt, että kaikilla $x, y \in]c - \delta, c + \delta[$ pätee

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| < \epsilon.$$

Kuten aikaisemmin, tästä seuraa ristiriita, koska on olemassa niin lyhyt suljettu väli I_n, että se sisältyy kokonaan avoimeen väliin $]c - \delta, c + \delta[$. Ristiriita johtuu tietysti siitä, että $P(I_n)$ eli on olemassa pisteet $x, y \in I_n$, joille $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.

M.O.T.

Lopuksi pari sanaa siitä, miten tässä tarinassa tavattuja ilmiöitä kutsutaan "ylemmillä" matematiikan kursseilla.

Täydellisyys tarkoittaa mm. funktionaalianalyysissä sitä, että kaikki Cauchy-jonot suppenenevat. Toisin sanoen edellä todistettiin, että lukusuora R on täydellinen avaruus. (Tietoa supremumien olemassaolosta kutsutaan usein täydellisyysaksiomiksi. Se, ettei tässä synny ristiriitaa nimityksien kesken perustuu siihen, että — tässä jännittävä harjoitustehtävä! — Cauchy-jonojen suppenemisesta ja tiedosta että $\frac{1}{n} \to 0$ seuraa ylhäältä rajoitettujen joukkojen supremumien olemassaolo. Muuten, tieto $\frac{1}{n} \to 0$ on yhtäpitävää syksyn monisteen alkupuolella esiteltävän Arkhimedeen lauseen kanssa. Tässä taas harjoitustehtävä!)

Kompaktisuus Olemme kohdanneet useita hiukan erilaisia muunnelmia ilmiöstä, jota topologiassa kutsutaan kompaktiudeksi. Näitä ovat mm. se, että jokaisella jonolla suljetun välin lukuja on suppeneva osajono sekä suljettuja välejä koskeva Heine-Borelin lause. Suljettu väli on kompakti avaruus. Itse asiassa , koko tässä tarinassa on ennen kaikkea kyse suljetun välin kompaktiudesta ja sen seurauksista.