MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät ja kotitehtävät 4
3.10.2011 alkavalle viikolle

Tällä viikolla harjoitellaan lukujonojen raja-arvojen ominaisuuksia ja tutustutaan supremumin ja infimumin käyttöön.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n}$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna vakiojonon raja-arvoa sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

E2. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)}$$

E3. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n^2+2)(n+4)}$$

E4. Määritä joukon

$$\{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

supremum ja infimum. Onko joukolla suurinta tai pienintä alkiota?

E5. Oletetaan, että lukujono (x_n) suppenee. Osoita, että on olemassa luku $M > 0$ ja kynnys K, joille kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| \leq M$. (Itse asiassa tässä voi päästä eroon kynnyksestä K.)

E6. Oletetaan, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$
ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku K, jolle kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$. Tehtävä on erityisen "läpinäkyvä", jos tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Piirrä kuva kummastakin tapauksesta.

E7. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = 2x_n + 1$. (a) Yritetään määrittää tämän jonon "mahdolllinen raja-arvo" ja sjioitetaan x jonon jäsenen paikalle palautuskaavassa. Muodosta tämä yhtälö. Onko sillä ratkaisua? (b) Suppeneeko jonomme?

E8. Induktio!?!?... Mitä tiedät siitä? Mitä haluat tietää siitä? Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

KOTITEHTÄVÄT

K1. Selvitä lauseen 4.7 avulla
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n-2}.$$
Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna vakiojonon raja-arvoa sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

K2. Selvitä
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)}.$$

K3. Selvitä
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-1)(n^2-2n)}{(n^2+2)(n^3+3)}.$$

K4. Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n} - 2n) = \frac{1}{4}.$$

(Neliöjuuren jatkuvuuteen ei tietenkään voi vedota.)

K5. Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x_n = 0.$$

Vihje: huomaa, että suppeneva jono on aina rajoitettu.

K6. Oletetaan, että jono (x_n) on laskeva, jono (y_n) on nouseva, ja että kaikilla n pätee $y_n \leq x_n$. Osoita, että molemmat jonot suppenevat ja että $\lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$.

K7. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ ja että $a^2 = 5$.

K8. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon (x_n) raja-arvo on $\sqrt{5}$, jos $x_1 = 3$ ja kaikilla n pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}).$$

Huomaa, että tehtävässä on osoitettava, että ko. jono suppenee. Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä n jolle $|x_n - \sqrt{5}| < 10^{-100}$?