MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät ja kotitehtävät 3
26.9.2011 alkavalle viikolle

Tällä viikolla opetellaan lukujonon raja-arvon määritelmää ja raja-arvojen perusominaisuuksia. Suurin osa tehtävistä on muotoa "hyväksy tai hylkää"väitetty raja-arvo suoraan raja-arvon määritelmän nojalla.

Lisää raja-arvojen ominaisuuksia tulee seuraavassa tehtäväsarjassa ja lukujonojen opiskelun lopuksi kohtaamme lauseita, joista seuraa raja-arvojen olemassaolo kun jonolla on tietyt ominaisuudet.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

todeksi.

E2. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 2$$

epätodeksi.

E3. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+3} = 0$$

todeksi.

E4. Onko olemassa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}?$$

E5. Onko olemassa

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})?$$

E6. Etsi monisteesta lause, jonka perusteella jono $0, 1, 0, 1, \ldots$ hajaantuu.

E7. Todista edellisessä tehtävässä mainittu lause. Saat käyttää monistetta vapaasti.

E8. Voiko jonolla olla useita raja-arvoja? Todistus!

KOTITEHTÄVÄT

K1. Päteekö
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{3}{2}?$$

K2. Päteekö
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3} = 0?$$

K3. Päteekö
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{2n-3} = 1?$$

K4. Päteekö
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{2}{3}?$$

K5. Osoita väite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3-3} = 0$$
todeksi.

K6. Osoita väite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3-3} = 1$$
epätodeksi.

K7. Oletetaan, että $a < \lim_{n\to\infty} x_n < b$. (Oletus sisältää tiedon, että tutkittava jono suppenee.) Osoita, että on olemassa sellainen $K$, että $a < x_n < b$ kaikilla $n > K$. Tämäkin tehtävä on tarkoitus tehdä käyttäen suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää.

K8. Oletetaan, että lukujono $(x_n)$ suppenee. Oletetaan, että kaikilla $n$ on

$$y_n = (-1)^n x_n.$$

Osoita, että jono $(y_n)$ suppenee, jos $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entä jos luovutaan tästä oletuksesta?