

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Ex temporetehtävät ja kotitehtävät 2

19.9.2011 alkavalle viikolle

Huom: Joissakin tehtävissä on hyötyä tiedoista $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, jne. (Nämä voi tarkistaa suorittamalla kertolaskut.)

Tällä viikolla opetellaan itseisarvon määritelmää ja itseisarvon käyttöä arvioinnissa.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|x - 7| < 2$? Arvaa ensin vastaus ajattelemalla erotuksen itseisarvoa etäisyytenä. Todista sitten väite itseisarvolemman avulla ($|x| < a$ jos ja vain jos $-a < x < a$;kun a on positiivinen.) Anna vastaus välin muodossa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti!

E2. Oletetaan, että $h > 0$. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|x - 7| < h$? Anna vastaus välin muodossa.

E3. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|2x - 3| < 1$? Anna vastaus välin muodossa. Muuta epäyhtälö ensin muotoon $|x - a| < b$.

E4. Mitkä reaalityluvut toteuttavat molemmat epäyhtälöt $|x + 2| < 3$ ja $|x - 2| < 3$? Sovella itseisarvolemmaa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti.

E5. (a) Etsi sellainen luku $K > 0$, että kaikilla välille $]0, 2[$ kuuluvilla luvuilla x pätee $|x^3 - 1| \leq K|x - 1|$.

(b) Onko olemassa sellaista positiivista lukua h , että $|x^3 - 1| < 7^{-77777}$ aina kun $|x - 1| < h$?

E6. (a) Minkä välin muodostavat ne reaalityluvut x , joiden likiarvo kahden desimaalin tarkuudella on 23,14. Muistele koulun pyöristyssääntöjä.

(b) Oletetaan, että $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-1}$. Mitä tiedät tämän nojalla luvun x desimaalikehitelmästä?

(c) Entä jos $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-23}$?

(Luvun e^π kehitelmä alkaa näin:

23,14069263277926900572908636794854738026610624260021.)

E7. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikille välille $[1, 3]$ kuuluvilla x pätee $|2x^2 + x - 10| \leq K|x - 2|$. Huom: lausekkeen $2x^2 + x$ arvo kohdassa $x = 2$ on 10. Siksi kannattaa lähteä liikkeelle näin: $(2x^2 + x) - 10 = (2x^2 + x) - (8 + 2) = (2x^2 - 8) + (x - 2)$.

E8. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikille välille $[0, 2]$ kuuluvilla x pätee $|(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2)| \leq K|x - 1|$. Huom: lausekkeen $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ arvo kohdassa $x = 1$ on -2 . Katso tehtävien alussa olevia kaavoja...

KOTITEHTÄVÄT

K1. Perustele itseisarvon tarkan määritelmän avulla, että

(a) $|x| \geq 0$;

(b) $|x| = |-x|$;

(c) $|xy| = |x||y|$. (Kumpikin luvuista voi olla toisesta riippumatta < 0 , $= 0$ tai > 0 . Käy läpi kaikki 9 tapausta.)

K2. Oletetaan, että $|x - \sqrt{2}| < 2^{-1000}$ ja $|y - \sqrt[3]{3}| < 2^{-1000}$. Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä summien välisestä etäisyydestä $|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})|$?

K3. Oletetaan, että $|x - 5| < 4^{-4444}$. Pitääkö välttämättä paikkansa $|x^2 - 25| < 4^{-4442}$? Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|x^2 - 25|$ välillä $]4, 6[$.

K4. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikilla välin $]1, 3[$ pisteillä x pätee

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| \leq K|x-2|.$$

Kannattaa laskea itseisarvojen sisällä oleva erotus ja arvioida tämän itseisarvoa ylöspäin niin, että pääset muotoon ”vakio kertaa $|x - 2|$ ”.

K5. Oletetaan, että $|x - 2| < 10^{-1000}$. Pitääkö paikkansa, että

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| < 10^{-1001}?$$

Kannattaa soveltaa tehtävän K4 tulosta!

K6. Etsi sellainen luku $h > 0$, että

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| < 7777^{-7777}$$

aina kun $|x-2| < h$. Kannattaa soveltaa tehtävän K4 tulosta!

K7. Pitääkö kaikille $x \geq 0$ paikkansa $|\sqrt{x}-3| \leq \frac{1}{3}|x-9|$? Huom: $3 = \sqrt{9}$.

K8. Pitääkö kaikille $x \geq 0$ paikkansa $|\sqrt[3]{x}-2| \leq \frac{1}{4}|x-8|$? Huom: $2 = \sqrt[3]{8}$. Erotuksen $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}$ käsittelyssä on hyötyä tehtävien alussa annetuista kaavoista.