Analyysi 1, Koekertaus ensimmäiseen välikokeeseen

Ratkaisuehdotelmia, Katriina K, Olli H

19. lokakuuta 2011

E1. Oletetaan, että $|2x-4|<6$ ja että $|x+2|<2$. Osoita, että $|2x+1|<1$.

Ratkaisu. Tutkitaan ensin oletuksia. Itseisarvolemmaa käyttämällä saadaan oletusten ensimmäisestä epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}|2x-4|<6 &\Leftrightarrow 2|x-2|<6\\ &\Leftrightarrow |x-2|<3\\ &\Leftrightarrow -3<x-2<3\\ &\Leftrightarrow -1<x<5\end{aligned}$$

ja toisesta epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}|x+2|<2 &\Leftrightarrow -2<x+2<2\\ &\Leftrightarrow -4<x<0.\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä saadut avoimet välit huomaamme, että tehtävän oletukset ovat yhtäpitävää sen kanssa, että $-1<x<0$.

Toisaalta väitteen epäyhtälöstä saadaan itseisarvolemman avulla

$$\begin{aligned}|2x+1|<1 &\Leftrightarrow 2|x+\frac{1}{2}|<1\\ &\Leftrightarrow |x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow -1<x<0.\end{aligned}$$

Nyt havaitaan, että väite on yhtäpitävää oletusten kanssa, mikä todistaa väitteen.

E2. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1)}{(n^2+2)(n^2+3)}.$$

Ratkaisu. Muokataan aluksi lauseketta sellaiseen muotoon, josta suppeneminen on helpompi havaita.

$$\frac{n(n^2+1)}{(n^2+2)(n^2+3)} = \frac{n^3+n}{n^4+5n^2+6} = \frac{n^4(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})}{n^4(1+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^4})} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^4}}$$

Seuraavaksi tarvitsemme kurssilla todistettua tietoa vakiofunktion raja-arvosta sekä funktion $\frac{1}{n}$ rajarvoista. Toisin sanoen tiedämme, että
$\lim_{n\to\infty} c = c$ kaikilla $c \in R$, ja että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Koska tiedämme joidenkin raja-arvojen olemassaolon, voimme käyttää hyväksemme lausetta 4.7. Muodostamme tämän lauseen avulla ensin osoittajan yksittäisten termien raja-arvot.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Näiden raja-arvojen ja lauseen 4.7 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} = 0 + 0.$$

Todistamme samalla tavalla nimittäjän raja-arvon olemassaolon. Siis tehtävän alussa esitettyjen lauseiden raja-arvojen ja lauseen 4.7 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} 5 = 5$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (5 \cdot \frac{1}{n^2}) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 6 = 6$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(6\cdot\frac{1}{n^4}) = 6\cdot 0 = 0$$

Näiden raja-arvojen ja lauseen 4.7 perusteella

$$\lim_{n\to\infty}(1+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^4}) = 1+0+0 = 1.$$

Nyt olemme todistaneet sekä osoittajan että nimittäjän raja-arvot. Edelleen näiden raja-arvojen ja lauseen 4.7 perusteella

$$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

E3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n}) = \infty.$$

Ratkaisu. Lukujono (x_n) kasvaa rajatta, mikäli kaikilla $M > 0$ on olemassa $k > 0$ s.e. $x_n > M$ kaikilla $n > k$. Toisin sanoen lukujono kasvaa rajatta, mikäli sen jäsenet ovat jostakin alkaen mielivaltaisen suuria. Todistetaan nyt väite käyttämällä tätä määritelmää.

TAPA 1:

Olkoon $M > 0$. Nyt valitsemalla $k = 2M+1$, pätee kaikilla $n > k$

$$n-\sqrt{n} = \frac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}} > \frac{n^2-n}{2n} = \frac{n-1}{2} > \frac{k-1}{2} = \frac{2M+1-1}{2} = \frac{2M}{2} = M.$$

TAPA 2:

Olkoon $M > 0$. Nyt valitsemalla $k = M^2$, pätee kaikilla $n > k$

$$n-\sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \overset{n>4}{>} \sqrt{n} > \sqrt{k} = \sqrt{M^2} = M.$$

E4. Oletetaan, että kaikilla $x \in]0,2[$ pätee $|f(x)| \leq 7|x-1|^2$. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0.$$

Ratkaisu.

Aluksi huomataan, että koska tarkastelemme väliä $]0,2[$, pätee $0 < |x-1| < 1$.

Koska kaikilla $x \in]0, 2[$ pätee $|f(x)| \leq 7|x-1|^2$, pätee erityisesti myös $|f(1)| \leq 7|1-1|^2 = 0$. Siis $f(1) = |f(1)| = 0$.

Käytämme tätä tietoa hyväksemme arvioidessamme etäisyyttä funktion arvon ja sen mahdollisen raja-arvon välillä:

$$\left| \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 0 \right| = \left| \frac{f(x)-0}{x-1} \right| = \frac{|f(x)|}{|x-1|} \leq \frac{7|x-1|^2}{|x-1|} = 7|x-1|$$

Nyt voimme muotoilla todistuksen. Olkoon $\varepsilon > 0$, $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ ja $0 < |x-1| < \delta$. Aiemmin todistetun arvion perusteella

$$\left| \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 0 \right| \leq 7|x-1| < 7\delta \leq 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$