

Analyyssi I

1. kurssikoe 20.10.2011

Ratkaisuja.

$$1. \quad \frac{2n+1}{n+2} + \frac{n+2}{2n+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, on Lauseen 4.7 nojalla $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$,

ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$, Edelleen Lauseen 4.7, nojalla on $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{n} = 1 + 0 = 1$.

Siiis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

ja lopuksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} + \frac{n+2}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{2 \frac{1}{2}}}$$

Arvostelusta:

- oikea idea 2 p.
- oikea vastaus 1 p.
- perustelut 3 p.

(Esim. ratkaisussa " $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} + \frac{n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{1+0} + \frac{1+0}{2+0} = 2 \frac{1}{2}$ " on oikea idea ja oikea vastaus, mutta perustelut puuttuvat. Siis 3 p.)

3. Tod. Olk. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}$.

Ol. että $0 < |x-3| < \delta$, jolloin $|x-3| < 1$ eli $2 < x < 4$
ja lisäksi $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Tällöin

$$\begin{aligned} |(x^2-3x+1) - 1| &= |x^2-3x| = |x(x-3)| = |x||x-3| \\ &< 4 \cdot |x-3| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen. \square

Joitakin arvosteluperusteita:

- virhe epäyhtälöissä, esim. $|x^2-3x| < |x-3|$ tms. \rightarrow tehtävästä max 4 p.
- väärä oletus tarkasteltavista x :n arvoista, esim. $1 < x < 3$ tms. \rightarrow max 3 p.
- δ riippuu x istä, "val. $\delta = \frac{\varepsilon}{x}$ " tms. \rightarrow max 1 p.

Tehtävät 1 ja 3 arvosteli Erik Elfvig.

Vastaanottajat (huone B426): ma 13-14, pe 9.30-10.30;

Laskupaja (C337): ke 10-12.