Analyysi I, 1. kurssikoe to 20.10.2011: tehtävien 2 ja 4 ratkaisut arvostelukommentteineen
Jouni Luukkainen (D319; vastaanotot ti 9–10 ja pe 9–10; laskupajassa C337 to 14–16)
Arvostelu valmistui pe 4.11.2011

2. *Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+1}{n^2+7} = 7.$$

Ratk. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, niin

$$\left|\frac{7n^2+1}{n^2+7} - 7\right| = \left|\frac{7n^2+1-7(n^2+7)}{n^2+7}\right| = \left|\frac{7n^2+1-7n^2-49}{n^2+7}\right| = \frac{|-48|}{n^2+7} = \frac{48}{n^2+7} < \frac{48}{n^2} \leq \frac{48}{n} < \varepsilon,$$

kun $n > 48/\varepsilon$. Valitaan (reaalilukujen täydellisyysaksiomaan perustuvan Arkhimedeen lauseen nojalla) sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \geq 48/\varepsilon$. Nyt, jos $n > n_\varepsilon$, niin $n > 48/\varepsilon$, joten $\left|\frac{7n^2+1}{n^2+7} - 7\right| < \varepsilon$.

Arvostelusta. Valinta $n_\varepsilon = 48/\varepsilon$ (tai vastaava), joka sallisi, että $n_\varepsilon \notin \mathbb{N}$, vei pisteen. Lausekkeen sieventämisessä laskuvirheet veivät pisteen, elleivät virheet sitten kaataneet ratkaisua kokonaan. Arvio $48/(n^2+7) \geq 48/(n^2+7n^2) = 6/n^2$ vei väärään suuntaan ja katkaisi jatkon. Monen esittämästä arviosta $48/n^2 < 48/n$, joka ei päde, jos $n = 1$, ei sakotettu erikseen, jos lopullisesta ehdosta n:lle seurasi, että $n > 1$.

Teht. 4. *Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Merkitään $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että*

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

Ratk. Reaalilukujoukot A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja, joten niillä todella on pienimmät ylärajat $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Merkitään $C = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$.

Luku $a + b$ on joukon C yläraja, sillä jos $z \in C$, niin on olemassa $x \in A$ ja $y \in B$, joilla $z = x + y$, jolloin $x \leq a$ ja $y \leq b$ ja siis $z = x + y \leq a + b$.

Joukolla C ei ole lukua $a + b$ pienempää ylärajaa, sillä jos $\varepsilon > 0$, niin on olemassa $x \in A$ ja $y \in B$, joilla $x > a - \frac{1}{2}\varepsilon$ ja $y > b - \frac{1}{2}\varepsilon$, jolloin pisteelle $z = x + y \in C$ pätee $z > (a - \frac{1}{2}\varepsilon) + (b - \frac{1}{2}\varepsilon) = (a + b) - \varepsilon$.

Täten on olemassa $\sup C = a + b$.

Arvostelusta. Joukolle $\{x+y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$ oli syytä antaa nimi, kuten C yllä; kanonisesta merkinnästä $A + B$ sai 1 pisteen, jos pisteitä ei muuten herunut! Ylipäätään 1 pisteeseen pääsi monin eri tavoin. Luvun $a + b$ osoittaminen C:n ylärajaksi toi 3 pistettä; samoin sen osoittaminen, että C:llä ei ole lukua $a + b$ pienempää ylärajaa.

Puhuminen pienimpien ylärajojen sijasta joukkojen A, B ja C suurimmista alkioista vei pisteet nollaan, sillä toisaalta näillä joukoilla ei tarvitse olla suurinta alkiota ja toisaalta tehtävä on helpompi, jos A:lla ja B:llä on suurimmat alkiot (ts. jos $a \in A$ ja $b \in B$).

Joukkojen A ja B kuvaaminen (kasvavina suppevina) jonoina ja lukuja a ja b näiden jonojen raja-arvoina ei tuottanut pisteitä, ei myöskään supremumin esittäminen jonkinlaisena joukon raja-arvona.