MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
KOTITEHTÄVÄT 14.11.2011 alkavalle viikolle

Ratkaisuehdotuksia
Johanna Kylliäinen
Heidi Saukkoriipi
Jeremias Berg

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion jatkuvuuteen liittyviä kysymyksiä.

K1. Osoita, että

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu: Koska tehtävänannossa ei rajata, mitä tietoja saamme tehtävän selvittämiseksi käyttää, on meillä käytettävissä kaikki kurssilla tähän mennessä opitut asiat.

Tiedetään, että f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Lähdetään siis tutkimaan funktion f raja-arvoa lauseen 5.4 avulla, kun $x \to x_0$.

Tutkitaan ensin osoittajan raja-arvoa:
$x^2 = x \cdot x \to^* x_0 \cdot x_0 = x_0^2$
$2x \to^* 2 \cdot x_0 = 2x_0$
$3 \to 3$
$x^2 + 2x + 3 \to^* x_0^2 + 2x_0 + 3$

Ja sen jälkeen nimittäjän raja-arvoa:
$x^2 + 1 \to^* x_0^2 + 1$

Huomataan, että nimittäjän raja-arvo $x_0^2 + 1 \neq 0$ kaikilla x. Siispä voidaan tarkastella osamäärän raja-arvoa:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \to^* \frac{x_0^2 + 2x_0 + 3}{x_0^2 + 1}$$

Ollaan siis saatu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ eli funktio on jatkuva kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$. Näin ollen f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

K2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^{77} + x^{33} + 22$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 23$.

Ratkaisu: Tarkasteltava funktio f on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla ja erityisesti f on täten jatkuva ja määritelty välillä [0,1].

Tarkastellaan välin [0,1] päätepisteiden arvoja:
$f(0) = 0^{77} + 0^{33} + 22 = 22$
$f(1) = 1^{77} + 1^{33} + 22 = 24$

Nyt Bolzanon lauseen perusteella f saa kaikki arvot lukujen 22 ja 24 väliltä eli on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 23$.

K3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ ja $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$. Osoita näiden havaintojen avulla, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 777$.

Todistetaan ensin, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.
Pohdinta:

$$f(x) = x^{77} + x^{33} + 22 > x^{77} + x^{33} \overset{x>1}{>} x$$

Todistus: Olkoon $M > 0$. Valitaan $x_M = \max\{1, M\}$. Olkoon $x > x_M$. Nyt

$$f(x) = x^{77} + x^{33} + 22 > x > x_M \geq M$$

.
Siis $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.

Todistetaan seuraavaksi, että $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$.
Pohdinta:

$$f(x) = x^{77} + x^{33} + 22 \overset{x<-1}{<} x + 22$$

Nyt $x + 22 < m$, kun $x < m - 22$.
Todistus: Olkoon $m < 0$. Valitaan $x_m = \min\{-1, m - 22\}$. Olkoon $x < x_m$. Nyt

$$f(x) = x^{77} + x^{33} + 22 < x + 22 < x_m + 22 \leq m - 22 + 22 = m$$

.
Siis $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$.

Todistetaan vielä, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = 777$.
Äskeisten raja-arvotodistusten nojalla kaikille $M > 0$ löytyy sellainen x_M, että jos $x > x_M$, niin $f(x) > M$. Tällainen x_M löytyy siis myös, jos $M = 778$. Lisäksi raja-arvotodistusten nojalla pätee myös, että kaikille $m < 0$ löytyy sellainen x_m, että jos $x < x_m$, niin $f(x) < m$. Tällainen x_m löytyy siis myös silloin, jos $m = -1$.

Nyt siis $f(x_M+1) > M > 778$ ja $f(x_m-1) < m < -1$.
Bolzanon lauseen perusteella löytyy nyt sellainen $x_0 \in]x_m-1, x_M+1[$, jolla $f(x_0) = 777$.

K4. Olkoon f tehtävän 2 funktio. Määritellään

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2+1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio g saa on pienin.

Ratkaisu: Funktio g saa arvoja väliltä $[0, \infty[$.
Osoitetaan ensin, että f:llä on nollakohta määrittelyjoukossaan:

Edellisen tehtävän raja-arvojen nojalla löytyy x_M siten, että $f(x) > 1$, kun $x > x_M$.
Samoin löytyy x_m siten, että $f(x) < -1$, kun $x < x_m$.
Bolzanon lauseen perusteella on olemassa $x_0 \in]x_m, x_M[$, jossa $f(x_0) = 0$.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota f^2. Funktio saa epänegatiivisia arvoja eli $f(x)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
Koska osoitimme äsken, että funktio f saa arvon nolla määrittelyjoukossaan, saa f^2 tällöin pienimmän arvonsa eli arvon nolla.

Todistetaan nyt, että myös g saa pienimmän arvonsa:

$f(x)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in [0, \infty[$, joten $f(x)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$ ja $\sqrt{f(x)^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$.

Lisäksi todistettiin, että on olemassa x_0, jolle pätee $f(x_0) = 0$, niin tällöin $\sqrt{f(x_0)^2+1} = \sqrt{0+1} = 1$.
Siis g saa määrittelyjoukossaan pienimmän arvonsa.

K5. Oletetaan, että funktio $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]0, \infty[$. Merkitään $g(x) = f(x^2+1)$. Onko näin määritelty funktio g jatkuva koko joukossa $\mathbb{R}$?

Ratkaisu: Tämä tuntuisi olevan lauseen 6.4 sovellus. Huomataan ensin että oletuksista seuraa että funktio f on jatkuva myös joukossa $[1, \infty[$. Määritellään

$$h : \mathbb{R} \to [0, \infty[\quad h(x) = x^2 + 1$$

Koska h on polynomfunktio on se myös jatkuva kaikkialla joukossa $\mathbb{R}$. Huomataan myös että koska kaikille x, $h(x) \geq 1$ niin oletusten mukaan funktio f on jatkuva pisteessä $h(x_0)$ kaikille $x_0 \in \mathbb{R}$. Nyt siis lauseen 6.4 mukaan funktio $f \circ h$ on jatkuva kaikille $x_0 \in \mathbb{R}$, eli joukossa $\mathbb{R}$. Tehtävän väite seuraa kun huomataan että kaikille x:än arvoille pätee $g(x) = f(x^2+1) = f(h(x)) = f \circ h(x)$. Eli funktiot ovat samat ja g:kin on siis jatkuva.

K6. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Monisteen lause 6.9 voisi auttaa tähän tehtävään. Osoitetaan ensiksi että f on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan ($\mathbb{R}$).
Kaikilla x_0 pätee että jos $x_1 < x_2$ niin $x_1^3 < x_2^3$ ja $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$. Eli funktio f on aidosti kasvava ja lauseen 6.9 mukaan määrittelee käänteisfunktion $f^{-1}\colon f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nyt pitäisi vielä osoittaa että $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$, eli että funktio saa arvoikseen kaikki reaaliluvut.
Ensiksi todetaan että koska f on polynomi on se jatkuva joukossa $\mathbb{R}$ Huomataan myös että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ ja $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$ koska x:än suurin eksponentti on pariton.

Osoitetaan että f saa arvoikseen kaikki reaaliluvut. Olkoon siis $a \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Nyt koska $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ voidaan määritelmän perusteella löytää sellainen x_m että kaikille $x < x_m$ pätee $f(x) < a - 1$.
Erikoisesti $f(x_m - 1) < a - 1$. Vastaavasti löydetään x_M jolle pätee
$f(x_M + 1) > a + 1 > a > f(x_m - 1)$. Koska f oli kasvava pätee myös että $(x_m - 1) < (x_M + 1)$. Nyt funktio f toteuttaa Bolzanon lauseen oletukset välillä $[x_m - 1, x_M + 1]$ eli funktio saa kaikki arvot lukujen $f(x_m - 1)$ ja $f(x_M + 1)$ välistä. Erikoisesti löytyy siis $x_m - 1 < x' < x_M + 1$ jolle $f(x') = a$.
Ollaan osoitettu että funktio saa arvoikseen kaikki reaaliluvut, eli $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Tämä osoittaa että tehtävän funktiolla on käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

K7. Tarkastellaan tehtävän 2 lausekkeella määriteltyä funktiota $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Osoita, että sillä on aidosti kasvava ja jatkuva käänteisfunktio.

Ratkaisu: Huomataan ensiksi että tällä määrittelyjoukolla funktio f saa arvoikseen vain positiivisia lukuja, eli ei ole olemassa sellaista $x_0 \in [0, \infty[$ jolle pätisi $f(x_0) = -1$. Eli $f[0, \infty[\neq \mathbb{R}$ joten funktiolle ei löydy käänteiskuvausta $\mathbb{R} \to [0, \infty[$. Kuitenkin funktiolle voi löytyä käänteiskuvaus: $f^{-1}\colon f[0, \infty[\to [0, \infty[$. Tutkitaan tätä seuraavaksi.

Nyt haluttaisiin taas käyttää lausetta 6.9. Ensiksi huomataan että jos $x_1, x_2 \in [0, \infty[$ ja $x_1 < x_2$ niin pätee myös $x_1^{77} < x_2^{77}, \quad x_1^{33} < x_2^{33}$ ja $f(x_1) = x_1^{77} + x_1^{33} + 22 < x_2^{77} + x_2^{33} + 22 = f(x_2)$. Eli f on aidosti kasvava ja määrittelee täten käänteisfunktion $f^{-1}\colon f[0, \infty[\to [0, \infty[$
Osoitetaan vielä että $f[0, \infty[= [22, \infty[$

Aikaisemmissa tehtävissä on osoitettu että $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$ ja että f on jatkuva. Nyt kun vielä huomataan että $f(0) = 22$ voidaan edellisten tehtävien tapaan kaikille $a \in]22, \infty[$ löytää sellainen x_M että $f(x) > a > f(0)$ kun $x > x_M$. Koska f on kasvava pätee myös $0 < x_M$. Nyt funktio f toteuttaa bolzanon lauseen oletukset välillä $[0, x_M + 1]$ ja on siis olemassa $x' \in]0, x_M + 1[$ jolle $f(x') = a$. Toisaalta koska f on kasvava, kaikille $x \in [0, \infty[\quad f(x) \geq f(0) = 22$ eli $f[0, \infty[= [22, \infty[$

K8. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(1) < f(3)$ ja $f(2) > f(4)$. Osoita, että on olemassa kaksi eri reaalilukua x ja y, joilla $f(x) = f(y)$. (Tämä tehtävä on erikoistapaus todistuksesta tulokselle, jonka mukaan jatkuva injektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on välttämättä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.)

Ratkaisu: Jokin seuraavista pätee: $f(2) = f(3)$, $f(2) < f(3)$ tai $f(2) > f(3)$. Tutkitaan tapaukset erikseen.

$f(2) = f(3)$: Tämä on selvä, sillä luvut 2 ja 3 ovat halutut luvut.

$f(2) < f(3)$: Tällöin pätee $f(4) < f(2) < f(3)$, joten Bolzanon lauseen perusteella väliltä $]3, 4[$ löytyy luku x, jolle pätee, että $f(x) = f(2)$. Nyt luvut x ja 2 ovat halutut luvut.

$f(2) > f(3)$: Tällöin pätee $f(1) < f(3) < f(2)$, joten Bolzanon lauseen perusteella väliltä $]1, 2[$ löytyy luku x, jolle pätee, että $f(x) = f(3)$. Nyt luvut x ja 3 ovat halutut luvut.