MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
7.11.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Jarno Lintusaari ja Vesa Piilola)

Näissä harjoituksissa käsitellään vielä funktion raja-arvoihin liittyviä kysymyksiä.
Huom. Periaatteessa derivaatta ja sen mekaaninen käyttö ovat tuttuja lukion (pitkästä) matematiikasta. Mutta ehkä asia ei ole sinulle kuitenkaan täysin selvä. Siksi kannattaa kysyä derivaatasta luennoilla. Lisäksi käynnistän kurssin moodleen keskustelun derivaatasta.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7}.$$

Ratkaisu. Kootaan vastaus soveltamalla lausetta 5.4. Tiedämme että vakiofunktion $f(x) = a$, missä $a \in \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä 2 on vakio a. Lisäksi funktion $f(x) = x$ raja-arvo pisteessä 2 on 2. Nyt lauseen 5.4. perusteella, kun $x \to 2$ saamme:

$x^2 = x \cdot x \to 2 \cdot 2 = 4$,
$x^3 = x^2 \cdot x \to 4 \cdot 2 = 8$,
$2x^3 \to 2 \cdot 8 = 16$ ja
$x^2 + x \to 4 + 2 = 6$.

Nyt saamme osoittajan raja-arvoksi $2x^3 + (x^2 + x) \to 16 + 6 = 22$ ja vastaavasti nimittäjän raja-arvoksi $x^2 + 7 \to 4 + 7 = 11$, kun $x \to 2$.

Siispä

$$\frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7} \to \frac{22}{11} = 2, \quad \text{kun } x \to 2.$$

K2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{7x^3+1} = \frac{1}{7}.$$

Pohdintaa:
Halutaan näyttää, että $|\frac{x^3-1}{7x^3+1} - \frac{1}{7}| < \varepsilon$ kun $x > M_\varepsilon$. Tutkitaan erotuksen itseisarvoa.

$$\left|\frac{x^3-1}{7x^3+1}-\frac{1}{7}\right| = \left|\frac{7x^3-7-7x^3-1}{7(7x^3+1)}\right| = \left|\frac{-8}{7(7x^3+2)}\right| = \frac{8}{7(7x^3+1)}$$

$$\leq \frac{8}{(7x^3+1)} \overset{x\geq 1}{\leq} \frac{8}{7x^3+x^3} \leq \frac{1}{x^3} \overset{x\geq 1}{\leq} \frac{1}{x}.$$

Nyt huomataan, että $\frac{1}{x} < \varepsilon$ aina kun $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ratkaisu.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x > M_\varepsilon$ valitaan $M_\varepsilon \geq \max\{1, \frac{1}{\epsilon}\}$. Nyt

$$\left|\frac{x^3-1}{7x^3+1}-\frac{1}{7}\right| = \frac{8}{7(7x^3+1)} \overset{x\geq 1}{\leq} \frac{1}{x} < \frac{1}{M_\varepsilon} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Siten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{7x^3+1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{5+x}{3-x} = -\infty.$$

Ratkaisu. Huomataan, että kyseessä on oikeanpuoleinen raja-arvo. Määritelmän mukaan väite pätee, jos jokaista $m < 0$ kohti voidaan löytää sellainen $\delta > 0$, että aina kun $3 < x < 3+\delta$ pätee, että $f(x) < m$. Huomataan, että määritelmän ehdoista seuraa, että erotus $(x-3) > 0$. Tutkitaan nyt funktiota f:

$$\frac{5+x}{3-x} = \frac{-(5+x)}{x-3} \overset{x>3}{\leq} \frac{-8}{x-3}.$$

Nyt $-8/(x-3) < m$ eli $-8 < m(x-3)$ ja koska $m < 0$ niin $(x-3) < -8/m$, missä $-8/m > 0$.

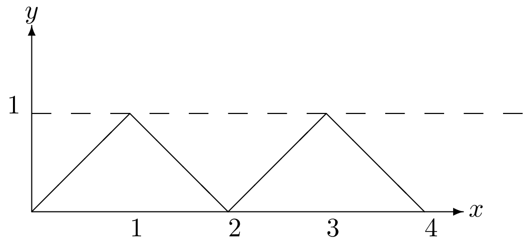
Voimme nyt muotoilla varsinaisen todistuksen. Olkoon $m < 0$ ja $\delta = -8/m$. Nyt kun $3 < x < 3 + (-8/m)$ pätee, että

$$\frac{5+x}{3-x} \leq \frac{-8}{x-3} < \frac{-8}{\frac{-8}{m}} = m.$$

K4. Oletetaan, että funktio $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikille $n = 0,1,2,\ldots$ ehdot $f(x) = x-2n$ kun $2n \leq x \leq 2n+1$ ja $f(x) = 2n+2-x$ kun $2n+1 < x < 2n+2$. Piirrä funktion kuvaaja. Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} f(x)?$$

Ratkaisu
Funktion f kuvaaja:



Osoitetaan, että raja-arvoa $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ei ole olemassa. Tehdään vastaoletus: raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ on olemassa ja merkitään

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Raja-arvon määritelmän nojalla, jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku M_ε, että aina kun $x > M_\varepsilon$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$. Nyt jos valitaan $\varepsilon = \frac{1}{3}$, niin on olemassa sellainen luku $M_{\frac{1}{3}}$, että

$$|f(x) - a| < \frac{1}{3}$$

aina kun $x > M_{\frac{1}{3}}$.

Huomataan, että funktio f on jaksollinen ja parillisilla kokonaisluvuilla pätee $f(2n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Lisäksi kaikilla parittomilla kokonaisluvuilla pätee $f(2n + 1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Olkoon n sellainen kokonaisluku, että $2n > M_{\frac{1}{3}}$. Tällöin muuttujan arvolla $x_1 = 2n > M_\varepsilon$,

$$|f(x_1) - a| < \frac{1}{3}.$$

Tämä pätee, koska vastaoletuksen mukaan $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

Toisaalta muuttujan arvolla $x_2 = 2n + 1 > M_{\frac{1}{3}}$ pätee

$$|f(x_2) - a| < \frac{1}{3}.$$

Huomataan myös, että $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = 1$. Tästä seuraa, että

$$1 = |1 - 0| = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - a + a - f(x_2)|$$

$$\leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Näin ollen saamme aikaan ristiriidan, joten alkuperäinen väite on tosi. Siis raja-arvoa $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ei ole olemassa.

K5. Oletetaan, että $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x).$$

Ratkaisu. Väite tuntuu intuitiiviselta, sillä vaikka f ei olisi edes jatkuva, niin pelkkä kasvavuus näyttäisi enteilevän sitä, ettei funktion arvo voi poukkoilla mielivaltaisesti lähestyttäessä toispuoleisesti jotakin määrittelyvälin sisäpistettä. Käytetään ratkaisuun apuna kurssimonisteen lausetta 5.9, joka todistaa avoimella välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$ kasvavan funktion f toispuoleisten raja-arvojen olemassaolon, ja lisäksi että välin Δ ylärajan raja-arvo on $\sup\{f(x)|x\in\Delta\}$ jos f on ylhäältä rajoitettu, ja vastaavasti alarajan raja-arvo on $\inf\{f(x)|x\in\Delta\}$, jos f on alhaalta rajoitettu.

Osoitetaan aluksi epäyhtälön vasen puoli. Koska funktio f on kasvava välillä $]a,b[$ ja $a < c < b$, niin f on myös kasvava ja määritelty välillä $]a,c[$. Koska $f(x) \leq f(c)$, kun $x \in]a,c[$, niin f on välillä $]a,c[$ ylhäältä rajoitettu. Nyt lauseen 5.9. perusteella

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \sup\{f(x)|x \in]a,c[\}.$$

Koska $f(c)$ on joukon $\{f(x)|x\in]a,c[\}$ yläraja saamme

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \sup\{f(x)|x \in]a,c[\} \leq f(c).$$

Epäyhtälön oikean puolen osoittaminen menee vastaavasti. Koska funktio f on kasvava välillä $]a,b[$ ja $a < c < b$, niin f on myös kasvava ja määritelty välillä $]c,b[$. Koska $f(x) \geq f(c)$, kun $x \in]c,b[$, niin f on välillä $]c,b[$ alhaalta rajoitettu. Nyt lauseen 5.9. perusteella

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \inf\{f(x)|x \in]c,b[\}.$$

Koska $f(c)$ on joukon $\{f(x)|x\in]c,b[\}$ alaraja saamme

$$f(c) \leq \inf\{f(x)|x \in]c,b[\} = \lim_{x\to c+} f(x).$$

K6. Oletetaan, että $f(x)\to a$ ja $g(x)\to b$ kun $x\to\infty$. Osoita, että $f(x) + g(x) \to a+b$ kun $x\to\infty$.

Ratkaisu. Koska $f(x)\to a$ kun $x\to\infty$ niin määritelmän nojalla on olemassa luku M_1, jolle pätee

$$|f(x)-a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kun $x > M_1$. (Itseasiassa määritelmä sanoo, että saamme erotuksen itseisarvon pienemmäksi kuin mikä tahansa $\varepsilon > 0$ mutta yhtähyvin saamme erotuksen pienemmäksi kuin $\frac{\varepsilon}{2}$.)

Samoin, koska $g(x) \to b$ kun $x \to \infty$ niin määritelmän nojalla on olemassa luku M_2, jolle pätee
$$|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$
kun $x > M_2$. Olkoon $\varepsilon < 0$ ja $x \geq \max\{M_1, M_2\}$. Nyt

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| = |f(x)-a+g(x)-b| \leq |f(x)-a|+|g(x)-b| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun $x \geq \max\{M_1, M_2\}$.

Siten $f(x) + g(x) \to a + b$ kun $x \to \infty$.

K7. Oletetaan, että $f :]-4, 6[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(5) = 2$ ja $f'(5) = 3$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla x pätee: jos $5 < x < 5+\delta$, niin $(3 - \frac{1}{7})(x-5) < f(x) - 2 < (3 + \frac{1}{7})(x-5)$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$. Kun $|x-5|$ kyllin pieni (ja $x \neq 0$), niin $|E(x) - 3| < \frac{1}{7}$ ... Kannattaa piirtää kuva!)

Ratkaisu. Sovelletaan vihjeen mukaan funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = (f(x) - f(5))/(x-5)$. Olkoon $\varepsilon = 1/7$. Koska oletuksen mukaan $f'(5) = 3$, niin erotusosamäärällä $E(x)$ on raja-arvo 3 pisteessä 5. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\delta_\varepsilon > 0$, että aina kun $|x-5| < \delta_\varepsilon$ pätee

$$\begin{aligned} |E(x) - 3| < \frac{1}{7} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{7} < E(x) - 3 < \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{1}{7} < E(x) < 3 + \frac{1}{7} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{1}{7}\right) < \frac{f(x) - f(5)}{x-5} < \left(3 + \frac{1}{7}\right) \end{aligned}$$

Koska yllä oleva pätee kun $|x-5| < \delta_\varepsilon$ eli välillä $5 - \delta_\varepsilon < x < 5 + \delta_\varepsilon$, niin pätee se myös osavälillä $5 < x < 5 + \delta_\varepsilon$. Tällöin $x - 5 > 0$ ja saamme

$$\left(3 - \frac{1}{7}\right)(x-5) < f(x) - 2 < \left(3 + \frac{1}{7}\right)(x-5).$$

Siis kun valitaan $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ niin väite pätee.

K8. Edellisessä tehtävässä tarkastellaan arvoja $x > 5$. Muotoile ja todista vastaava arvoja $x < 5$ koskeva väite. (Tässä ja tehtävässä K7 on positiivinen luku $\frac{1}{7}$ erityisasemassa. Onko taustalla jokin kaikkia positiivisia lukuja koskeva tieto?)
Väite: Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla x pätee: jos $5 - \delta < x < 5$, niin $(3 - \frac{1}{7})(x-5) > f(x) - 2 > (3 + \frac{1}{7})(x-5)$.

Ratkaisu. Funktio f on oletusten nojalla derivoituva pisteessä $x = 5$ ja $f'(5) = 3$. Näin ollen pätee

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 3.$$

Näin ollen funktion raja-arvon määritelmän nojalla kaikilla ε on olemassa $\delta > 0$, että aina kun $0 < |x-5| < \delta$, niin

$$\left|\frac{f(x)-f(5)}{x-5} - 3\right| < \varepsilon.$$

Oletuksen mukaan $f(5) = 2$. Valitaan lisäksi $\varepsilon = \frac{1}{7}$. Tällöin on olemassa luku $\delta > 0$, että aina kun $5 - \delta < x < 5 + \delta$, niin

$$\left|\frac{f(x)-2}{x-5} - 3\right| < \frac{1}{7}.$$

Erityisesti myös arvoilla $5 - \delta < x < 5$ vastaava pätee. Tällöin pätee lisäksi $x - 5 < 0$.

Itseisarvolemman nojalla tästä seuraa, että

$$-\frac{1}{7} < \frac{f(x)-2}{x-5} - 3 < \frac{1}{7}$$

aina kun $5 - \delta < x < 5$. Tästä seuraa

$$3 - \frac{1}{7} < \frac{f(x)-2}{x-5} < 3 + \frac{1}{7}.$$

Josta saadaan edelleen

$$(3 - \frac{1}{7})(x-5) > f(x) - 2 > (3 + \frac{1}{7})(x-5)$$

aina kun $5 - \delta < x < 5$.

Näin ollen väite on todistettu.

Lisähuomiona, että tehtävien 7 ja 8 todistukset menevät läpi myös jos $\frac{1}{7}$ korvataan millä tahansa sitä pienemmällä luvulla. Lisäksi luvun $\frac{1}{7}$ kohdalla voisi olla mikä tahansa positiivinen luku ja voisimme todistaa vastaavan kaltaisen epäyhtälön sillä tuo lukuhan saatiin vain valitsemalla ε sopivasti erotusosamäärän raja-arvosta.