MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Kotitehtävät 7
31.10.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Jere Nivukoski ja Paula Saarinen)

***K*1**. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite $\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{4}{7}$ on tosi.

Ratkaisu. Tutkitaan ensin funktion etäisyyttä raja-arvoehdokkaasta. Voidaan olettaa, että $0<|x-3|<\delta<1$, jolloin epäyhtälölemman mukaan pätee $-1<|x-3|<1$ ja edelleen $2<x<4$.

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{4}{7}\right| = \left|\frac{7(x+1)-4(2x+1)}{7(2x+1)}\right| = \left|\frac{-x+3}{14x+7}\right|$$

$$= \left|(-1)\frac{x-3}{14x+7}\right| = \left|\frac{x-3}{14x+7}\right| < \left|\frac{x-3}{14\cdot 2+7}\right| < |x-3|$$

Olkoon $\epsilon>0$. Valitaan $\delta=\min\{1,\epsilon\}$. Nyt

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{4}{7}\right| < |x-3| < \delta < \epsilon$$

Näin ollen funktion raja-arvon määritelmän perusteella $\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{4}{7}$.

***K*2**. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite $\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=1$ on epätosi.

Ratkaisu. Tarkastellaan sellaisia reaalilukuja x, joilla $x>1$. Näillä pätee

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+1}{2x+1}-1\right| &= \left|\frac{x+1-(2x+1)}{2x+1}\right| = \left|\frac{-x}{2x+1}\right| \\ &= \frac{x}{2x+1} > \frac{x}{2x+x} = \frac{1}{3}.\end{aligned} \tag{1}$$

Tämä havainto osoittautuu hyödylliseksi, sillä halutaan löytää sellainen $\epsilon>0$, että millään $\delta>0$ ei ehdoista $|x-3|<\delta$ ja $x\neq 3$ seuraa

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-1\right| < \epsilon,$$

Voidaan nimittäin valita $\epsilon=\frac{1}{3}$, jolloin jokaista lukua $\delta>0$ kohti löytyy sellainen $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 3$, että $|x-3|<\min\{1,\delta\}$. Tällöin $|x-3|<1$, joten itseisarvolemman nojalla $x>1$ ja siten epäyhtälö (1) pätee, eli

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-1\right| > \epsilon.$$

Lisäksi $|x-3|<\delta$, joten luku 1 täytä tehtävänannon funktion raja-arvon ehtoja. Siis ei päde

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=1.$$

***K*3**. Määritellään funkto $f:]1,4[\to\mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x)=\frac{x+1}{2x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x=3$ ja että $f'(3)=-\frac{1}{49}$.

Ratkaisu. On siis osoitettava, että jokaista $\epsilon>0$ kohti on olemassa sellainen $\delta>0$ että

$$(2)\qquad \left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\frac{1}{49}\right|<\epsilon \qquad \text{aina kun } |x-3|<\delta, x\neq 3$$

Koska kaikilla $x\neq 3$ pätee

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}&=\frac{1}{x-3}\left(\frac{x+1}{2x+1}-\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{x-3}\cdot\frac{7(x+1)-4(2x+1)}{7(2x+1)}\\&=\frac{1}{x-3}\cdot\frac{-x+3}{7(2x+1)}=\frac{1}{x-3}\cdot\frac{-1(x-3)}{7(2x+1)}=-\frac{1}{7(2x+1)},\end{aligned}$$

niin

(3)
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\frac{1}{49}\right|&=\left|-\frac{1}{7(2x+1)}+\frac{1}{49}\right|=\left|\frac{-7+(2x+1)}{49(2x+1)}\right|\\&=\left|\frac{2x-6}{49(2x+1)}\right|=\frac{2}{49|2x+1|}|x-3|<|x-3|,\end{aligned}$$

kun $x\neq 3$ ja $49|2x+1|>2$. Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu esimerkiksi silloin, kun $|x-3|<1$. Valitaan $\delta=\min\{1,\epsilon\}$, jolloin kaikilla $x\neq 3$ ja $|x-3|<\delta$ epäyhtälö (3) pätee ja $|x-3|<\epsilon$. Näin ollen on löydetty δ siten että epäyhtälö (2) pätee. Funktio f on siis derivoituva pisteessä 3 ja

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\frac{1}{49}.$$

***K*4**. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että funktio $f(x)=\sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x=16$.

Ratkaisu. On siis osoitettava, että jokaista $\epsilon>0$ kohti on olemassa $\delta>0$ siten, että

$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon \qquad \text{kun } x\in\mathbb{R} \text{ ja } |x-x_0|<\delta$$

Tutkitaan funktion arvojen etäisyyttä pisteestä $f(16)$.

$$|f(x)-f(x_0)| = |\sqrt{x}-\sqrt{16}| = |\sqrt{x}-4| = \left|\frac{x-16}{\sqrt{x}+4}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+4}|x-16| < |x-16|.$$

Nimittäjän itseisarvojen poistamiseen tarvitaan tietoa, että x on positiivinen ja hoidetaan se valitsemalla $\delta \leq 1$, jolloin $x \in [15, 17]$ ja nyt $\sqrt{x}$ on määritelty. Nyt voimme todistaa väitteen. Olkoon $\epsilon > 0$, valitaan nyt $\delta = \min\{1, \epsilon\}$. Kun $|x-16| < \delta$ pätee

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{\sqrt{x}+4}|x-16| < |x-16| < \delta \leq \epsilon.$$

Siis funktio f on jatkuva pisteessä $x = 16$.

***K*5**. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x = 16$ ja, että $f'(16) = 1/8$.

Ratkaisu. Jos $f'(16)$ on olemassa, niin derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(16) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{h}$$

Toisaalta

$$\frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})} = \frac{1}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}},$$

joten riittää osoittaa, että funktiolla $g(h) = \frac{1}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}}$ on raja-arvo $1/8$, kohdassa $h = 0$. Olkoon siis $\epsilon > 0$ ja asetetaan $\delta = \min\{16, \epsilon\}$. Tällöin ehdosta $|h| = |h - 0| < \delta$ seuraa $h > -16$, jolloin $16 + h > 0$ ja $\sqrt{16+h}$ on määritelty, ja saadaan

$$\left|\frac{1}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}} - \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{8-(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}{8(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}\right| = \left|\frac{4-\sqrt{16+h}}{8(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{8(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}\right| = \left|\frac{h}{8(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})^2}\right| < |h| < \epsilon.$$

Viimeisessä epäyhtälössä on käytetty tietoa, että $\sqrt{16+h} \geq 0$, jolloin

$$\frac{1}{|8(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})^2|} \leq \frac{1}{84^2} \leq 1.$$

Funktio f on näin ollen derivoituva kohdassa $x = 6$ ja $f'(16) = 1/8$.

***K*6**. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio f on määritelty kaikilla $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ ja että $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$.

Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen. (Voit myös yrittää käyttää "kolmioepäyhtälön vasenta puolta".)

Ratkaisu. Itseisarvolemman avulla nähdään, että

$$\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b| \Leftrightarrow -\frac{1}{2}|b| < |f(x)| - |b| < \frac{1}{2}|b| \Leftrightarrow ||f(x)| - |b|| < \frac{1}{2}|b|.$$

Koska oletuksen nojalla tiedetään jotain funktion arvon ja luvun b välisestä etäisyydestä (eikä näiden lukujen itseisarvojen etäisyydestä) muuttujan ollessa lähellä nollaa, pyritään edelleen muokkaamaan yllä saatua epäyhtälöä. Havaitaan, että itseisarvofunktiolla on ominaisuus, että $||x| - |y|| = |x - y|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ovat samanmerkkiset. Kun $x, y \geq 0$, ominaisuus seuraa suoraan. Kun $x, y < 0$, niin

$$||x| - |y|| = |(-x) - (-y)| = | - (x - y)| = |x - y|.$$

Koska $\|f(x) - b| < \epsilon$, on $f(x)$ ja b samanmerkkiset. Jos $f(x)$ olisi erimerkkinen kuin b, niin sen etäisyys luvusta b olisi suurempi kuin b:n etäisyys nollasta. Tällöin pätisi: Jos $f(x) > 0 > b$, niin

$$|f(x) - b| = f(x) - b > -b = |b|.$$

Jos $f(x) < 0 < b$, niin

$$|f(x) - b| = b - f(x) > b = |b|.$$

Tämä olisi ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa, joten $f(x)$ ja b ovat samanmerkkiset, kun ollaan riittävän lähellä lukua x_0. Nyt siis

$$||f(x)| - |b|| = |f(x) - b|.$$

Voidaan valita $\epsilon = \frac{1}{2}|b|$. Tällöin oletuksen nojalla on olemassa $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin

$$||f(x)| - |b|| < |f(x) - b| < \epsilon < \frac{1}{2}|b|.$$

K7. Oletetaan, että funktio g toteuttaa kaikilla $x \in]-1, 1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituvaa kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun x on irrationaalinen. Funktio voi olla siis tehtävän tuloksen perusteella olla derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)

Ratkaisu. Havaitaan, että

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |x||g(x)| < 7|x|,$$

kun $|x-0|<1$, eli $x \in]-1,1[$ ja $x \neq 0$. Jos $\epsilon > 0$,niin valitaan $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$. Tällöin ehdoista $x \neq 0$ ja $|x-0|<\delta$, seuraa, että

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |x||g(x)| < 7|x| < \epsilon,$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $|x-0|<\delta$. Näin ollen f on derivoituva nollassa ja

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0 = 0.$$

***K*8**. Määritellään

$$g(x) = \frac{7}{x^{66}+3x^{44}+5x^{22}+7}.$$

Määritellään funktio f yhtälöllä $f(x) = xg(x)$.
(a) Onko funktio f jatkuva kohdassa $x=0$? (b) Muotoile (a)-kohdan tuloksesi yleiseksi lauseeksi ja todista se. Vihje: tehtävästä K7 voi ottaa mallia.

Ratkaisu. (a) On siis osoitettava, että jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x)-f(0)| < \epsilon$$

aina, kun

$$|x-0| < \delta.$$

Funktion f arvo kohdassa $x=0$ on nolla, sillä $f(0) = 0g(0) = 0$. Tutkitaan funktion f jatkuvuutta kohdassa $x=0$.

$$|f(x)-f(0)| = |xg(x)| = \left|\frac{7x}{x^{66}+3x^{44}+5x^{22}+7}\right| < 7|x|.$$

Valitaan $\delta = \frac{\epsilon}{7}$, jolloin kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned} |f(x)-f(0)| = |xg(x)| &= \left|\frac{7x}{x^{66}+3x^{44}+5x^{22}+7}\right| \\ &< 7|x| < \frac{7\epsilon}{7} = \epsilon. \end{aligned}$$

Siis funktio f on jatkuva kohdassa $x=0$.

(b) Jos funktio g on rajoitettu ja määritellään funktio f yhtälöllä $f(x) = xg(x)$, niin funktio f on jatkuva kohdassa $x=0$. Todistus. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$ ja $|g(x)| < a$. Tunnetaan, että funktion f arvo kohdassa $x=0$ on nolla, sillä $f(0) = 0g(0) = 0$. Nyt voidaan valita $\delta = \frac{\epsilon}{a}$, jolloin kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$|f(x)-f(0)| = |xg(x)| = |x||g(x)| < a|x| < \frac{a\epsilon}{a} = \epsilon.$$

Siis funktio f on jatkuva kohdassa $x=0$.