MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät 4
3.10.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Joni Luhtalampi ja Lauri Sankari)

Tällä viikolla harjoitellaan lukujonojen raja-arvojen ominaisuuksia ja tutustutaan supremumin ja infimumin käyttöön.

KOTITEHTÄVÄT

**K1.** Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n-2}.$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna vakiojonon raja-arvoa sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

*Ratkaisu.* Lähdetään muokkaamaan lauseketta ottamalla $n$ yhteiseksi tekijäksi.

$$\frac{2n-3}{3n-2} = \frac{n(2-\frac{3}{n})}{n(3-\frac{2}{n})} = \frac{2-\frac{3}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2-3\frac{1}{n}}{3-2\frac{1}{n}}$$

Tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{ja } \lim_{n\to\infty} a = a, \text{ kun } a \in \mathbb{R}.$$

Tämän ja lauseen 4.7 perusteella:

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$$

Näiden perusteella

$$\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n} = 2 - 3 \cdot 0 = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{2}{n} = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3\frac{1}{n}}{3 - 2\frac{1}{n}} = \frac{2 - 3 \cdot 0}{3 - 2 \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

**K2.** Selvitä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)}.$$

*Ratkaisu.* Lähdetään taas muokkaamaan lauseketta. Kerrotaan aluksi sulut auki, jotta nähdään selvemmin, mitä olisi hyvä ottaa yhteiseksi tekijäksi.

$$\frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)} = \frac{2n^3 - 5n^2 + 2n}{n^3 + n^2 + 2n + 2} = \frac{n^3(2 - 5\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2})}{n^3(1 + \frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}$$

Tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{ja } \lim_{n\to\infty} a = a, \text{ kun } a \in \mathbb{R}.$$

Tämän ja lauseen 4.7 perusteella:

$$\begin{aligned}
&2 \to 2, \\
&1 \to 1, \\
&5 \to 5, \\
&\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0, \\
&\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0, \\
&5\frac{1}{n} \to 5 \cdot 0 = 0, \\
&2\frac{1}{n^2} \to 2 \cdot 0 = 0, \\
&2\frac{1}{n^3} \to 2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2-(5\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}) \to 2-0=2\\
&(1+\frac{1}{n})+(2\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}) \to 1+0=1,
\end{aligned}
$$

kun $n \to \infty$.

Siis

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2-5\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}}\\
&= \frac{2-5\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0}{1+2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 0}\\
&= 2
\end{aligned}
$$

**K3.** Selvitä

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2-1)(n^2-2n)}{(n^2+2)(n^3+3)}.
$$

*Ratkaisu.* Tehtävän voi ratkaista kuten tehtävän 2. Tehdään kuitenkin vaihtoehtoinen ratkaisu kertomatta sulkuja auki.

$$
\frac{(2n^2-1)(n^2-2n)}{(n^2+2)(n^3+3)} = \frac{n^2(2-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n})n^2}{n^2(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3})(1+\frac{3}{n^3})n^3} = \frac{1(2-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n})}{n(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^3})}
$$

Kuten edellisissä tehtävissä, pidetään tunnettuna, että

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \text{ja } \lim_{n\to\infty} a = a, \text{ kun } a\in\mathbb{R}.
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
&2 \to 2,\\
&1 \to 1,\\
&\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0\cdot 0 = 0,\\
&\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}(\frac{1}{n}\frac{1}{n}) \to 0\cdot 0 = 0,\\
&2\frac{1}{n^2} \to 2\cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3\frac{1}{n^3} \to 3 \cdot 0 = 0,\\
&2 - \frac{1}{n^2} \to 2 - 0 = 2,\\
&1 - \frac{2}{n} \to 1 - 0 = 1,\\
&1 + \frac{2}{n^2} \to 1 + 0 = 1,\\
&1 + \frac{3}{n^3} \to 1 + 0 = 0,
\end{aligned}
$$

kun $n \to \infty$.

Siis

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-1)(n^2-2n)}{(n^2+2)(n^3+3)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1(2-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n})}{n(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^3})}\\
&= 0 \cdot \frac{(2-0)(1-0)}{(1+0)(1+0)}\\
&= 0 \cdot 2\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

**K4.** Osoita, että

$$
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n} - 2n) = \frac{1}{4}.
$$

(Neliöjuuren jatkuvuuteen ei tietenkään voi vedota.)

*Ratkaisu.* Todistetaan väite lukujonon raja-arvon määritelmän avulla. Käytetään lavennustemppua kahdesti, jotta saadaan haluttu erotus helpommin käsiteltävään muotoon.

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $K \in \mathbb{N}$ siten, että $K > \frac{1}{\epsilon}$. Nyt aina kun $n > K$, niin

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{4n^2+n} - 2n - \frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{\sqrt{4n^2+n} - 2n)(\sqrt{4n^2+n} + 2n)}{\sqrt{4n^2+n} + 2n} - \frac{1}{4}\right|\\
&= \left|\frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n} + 2n} - \frac{1}{4}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{4n - (\sqrt{4n^2+n} + 2n)}{4\sqrt{4n^2+n} + 8n}\right| \\
&= \left|\frac{2n - \sqrt{4n^2+n}}{4\sqrt{4n^2+n} + 8n}\right| \\
&= \left|\frac{2n - n\sqrt{4+1/n}}{4n\sqrt{4+1/n} + 8n}\right| \\
&= \left|\frac{2 - \sqrt{4+1/n}}{4\sqrt{4+1/n} + 8}\right| \\
&= \frac{|2 - \sqrt{4+1/n}|}{4\sqrt{4+1/n} + 8} \\
&\leq |2 - \sqrt{4+1/n}| \\
&= \left|\frac{2^2 - (\sqrt{4+1/n})^2}{2 + \sqrt{4+1/n}}\right| \\
&= \frac{|1/n|}{2 + \sqrt{4+1/n}} \\
&\leq |1/n| = 1/n < 1/K < 1/(1/\epsilon) = \epsilon.
\end{aligned}
$$

**K5.** Oletetaan, että jono $(x_n)$ suppenee. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x_n = 0.$$

Vihje: huomaa, että suppeneva jono on aina rajoitettu.

*Ratkaisu. Tapa 1.* Koska jono $(x_n)$ suppenee on olemassa luku $a \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Tiedetään myös, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nyt lauseen 4.7 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x_n = 0 \cdot a = 0.$$

*Tapa 2.* Todistetaan väite lukujonon raja-arvon määritelmän kautta. Koska jono $(x_n)$ suppenee on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|x_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$
Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $K \in \mathbb{N}$ siten, että $K > \frac{M}{\epsilon}$. Jos $n > K$, niin

$$\left|\frac{1}{n}x_n - 0\right| = \frac{1}{n}|x_n| \leq \frac{M}{n} < \frac{M}{K} < \frac{M}{\frac{M}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

**K6.** Oletetaan, että jono $(x_n)$ on laskeva, jono $(y_n)$ on nouseva, ja että kaikilla $n$ pätee $y_n \leq x_n$. Osoita, että molemmat jonot suppenevat ja että $\lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$.

*Ratkaisu.* Luentomonisteesta löytyy lauseet 4.8 ja 4.9, joiden mukaan laskeva lukujono suppenee, jos se on alhaalta rajoitettu ja vastaavasti nouseva lukujono suppenee jos se on ylhäältä rajoitettu.

Osoitetaan ensin jono $(x_n)$ alhaalta rajoitetuksi. Eli etsitään luku $m \in \mathbb{R}$, jolle pätee $x_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Koska $(y_n)$ on nouseva jono, pätee $y_1 \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$. Oletuksen nojalla $y_n \leq x_n$, joten $y_1 \leq y_n \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$. Näin ollen jono $(x_n)$ on alhaalta rajoitettu $(y_1 = m)$. Siis jono suppenee lauseen 4.9 nojalla.

Osoitetaan seuraavaksi jono $(y_n)$ ylhäältä rajoitetuksi. Tulee siis löytää luku $M \in \mathbb{R}$, jolle pätee $y_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Koska $(x_n)$ laskeva jono, sille pätee $x_1 \geq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Oletuksen nojalla $y_n \leq x_n$, joten $y_n \leq x_n \leq x_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Näin ollen jono $(y_n)$ on ylhäältä rajoitettu $(x_n = M)$. Siis jono suppenee lauseen 4.8 nojalla.

Käytetään luentomonisteen korollaaria 4.6 osoittamaan väite $\lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$ todeksi. Olkoon $K \in \mathbb{N}$. Koska $(x_n)$ on laskeva kaikilla $n \geq K$ pätee $x_K \geq x_n \geq y_n$. Korollaarin 4.6 mukaan tällöin on $\lim_{n\to\infty} y_n \leq x_K$. Siis luku $\lim_{n\to\infty} y_n$ on alaraja kaikille luvuille $x_K$, eli nyt $\lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$.

**K7.** Osoita, että on olemassa reaaliluku $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ ja että $a^2 = 5$.

*Ratkaisu.* Määritellään, että $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$. Osoitetaan ensin joukko $A$ epätyhjäksi ja ylhäältä rajoitetuksi, jolloin täydellisyysaksiooman perusteella on olemassa $a = \sup A$. Huomataan, että $1 \in A$, sillä $1 > 0$ ja $1^2 = 1 < 5$. Siis joukko $A$ on epätyhjä. Lisäksi huomataan, että luku 3 on yksi yläraja, sillä jos $x \in A$ ja $x > 3$, niin pätisi $x^2 > 3^2 = 9 > 5$. Tällöin syntyisi ristiriita joukon määritelmän kanssa. Joten $x \leq 3$ kaikilla $x \in A$. Näin ollen on olemassa $a = \sup A$ ja $a \geq 1$.

Reaalilukujen järjestysaksioomien mukaan vain jokin seuraavista on voimassa: $a^2 < 5$, $a^2 = 5$ tai $a^2 > 5$. Osoitetaan, ettei $a^2$ voi olla pienempää tai suurempaa kuin 5.

Oletetaan ensin, että $a^2 < 5$. Tällöin löytyy $\varepsilon > 0$, jolle $5 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2$. Nyt $a + \frac{\varepsilon}{2} > a$ ja $(a + \frac{\varepsilon}{2})^2 = a^2 + a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} < a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 = 5$. Siis on olemassa $b = a + \frac{\varepsilon}{2} \in A$, jolle $b > a$. Syntyy ristiriita, sillä $a$ oli yläraja. Näin ollen ei voi olla $a^2 < 5$.

Oletetaan seuraavaksi, että $a^2 > 5$. Nyt löytyy $\varepsilon > 0$, jolle $5 = a^2 - 2a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$. Nyt $a - \frac{\varepsilon}{2} < a$ ja $(a - \frac{\varepsilon}{2})^2 = a^2 - a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} > a^2 - 2a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} = 5$, joten $(a - \frac{\varepsilon}{2})$ on yläraja. Syntyy ristiriita, sillä $a$ oli pienin yläraja. Ei voi siis myöskään olla $a^2 < 5$. Näin ollen tulee olla $a^2 = 5$.

**K8.** Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon $(x_n)$ raja-arvo on $\sqrt{5}$, jos $x_1 = 3$ ja kaikilla $n$ pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}).$$

Huomaa, että tehtävässä on osoitettava, että ko. jono suppenee. Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä $n$ jolle $|x_n - \sqrt{5}| < 10^{-100}$?

*Ratkaisu.* Osoitetaan ensin lukujono laskevaksi ja alhaalta rajoitetuksi, jolloin voimme lauseen 4.9 perusteella todeta lukujonon suppenevaksi. Tämän jälkeen voimme laskea lukujonon raja-arvon.

Tehdään alkuun kaksi havaintoa, joita tarvitsemme väitteen todistamiseen. Oletetaan, että $x$ on positiinen luku. Nyt

$$x > \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{5}{x} < \sqrt{5}$$

.

*Todistus.*

$$\text{"} \Rightarrow \text{"}: \quad x > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{5}{x} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{"} \Leftarrow \text{"}: \quad \frac{5}{x} < \sqrt{5} \Rightarrow 5 < \sqrt{5}x \Rightarrow x > \sqrt{5}$$

Jos oletetaan $x > \sqrt{5}$, niin osoitetaan, että $\frac{1}{2}(x + 5/x) > \sqrt{5}$.
*Todistus.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x + 5/x) > \sqrt{5} \quad &\Leftrightarrow \quad x + \frac{5}{x} > 2\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 5 > 2\sqrt{5}x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - \sqrt{5})^2 > 0 \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt jonoa $(x_n)$. Osoitetaan induktiolla väite: $x_n > \sqrt{5}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Perusaskel: Väite pätee kun $n = 1$, sillä $x_1 = 3 > \sqrt{5}$

Induktioaskel: Tehdään induktio-oletus: Väite $x_k > \sqrt{5}$ pätee jollakin $k \geq 1$. Nyt aiemman todistuksen perustella $x_{k+1} > \sqrt{5}$, joten induktioperiaatteen nojalla $x_n > \sqrt{5}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis jono on alhaalta rajoitettu luvulla $\sqrt{5}$.

Aikaisemman todistuksen perusteella $\frac{5}{x_n} < \sqrt{5} < x_n$. Joten luvun $x_{n+1}$ ollessa lukujen $\frac{5}{x_n}$ ja $x_n$ keskiarvo, pätee $x_{n+1} < x_n$ jokaisella $n$. Siten jono $(x_n)$ on laskeva. Lauseen 4.9 nojalla se siis suppenee ja epäyhtälön säilymisen periaatteen nojalla on voimassa $a = \lim_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{5}$.

Lasketaan nyt raja-arvo $a$. Koska $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$, niin soveltamalla lauseketta 4.7 saadaan:

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{2}(a + \frac{5}{a}) \quad &\Leftrightarrow \quad 2a = a + \frac{5}{a} \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{a} \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Viimeinen vaihe seuraa tiedosta $a \geq \sqrt{5} \geq 0$. On siis osoitettu, että jono $x_n$ suppenee ja sen raja-arvo on $\sqrt{5}$.

*Lisäkysymykset*

a) Yritetään verrata etäisyyttä $|x_{n+1} - \sqrt{5}|$ etäisyyteen $|x_n - \sqrt{5}|$. Koska $x_n > \sqrt{5}$ itseisarvoja ei tarvita.

$$|x_{n+1} - \sqrt{5}| \quad = \quad \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}) - \sqrt{5}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x_n^2 - 2\sqrt{5}x_n + 5}{2x_n} \\
&= \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{2x_n} \\
&< \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}} \\
&< \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{4}
\end{aligned}
$$

Kun $(x_n - \sqrt{5}) < 1$, niin sen toinen potenssi pienentää etäisyyttä entisestään. Kun tämä vielä jaetaan neljällä, saadaan entistä pienempi termi. Nämä selittävät osittain nopeaa suppenemista.

b) Käytetään a-kohtaa hyväksi etäisyyden arvioinnissa:

$$
\begin{aligned}
x_1 - \sqrt{5} &= 3 - \sqrt{5} < 1 \\
x_2 - \sqrt{5} &< \frac{(x_1 - \sqrt{5})^2}{4} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{2^2-2}} \\
x_3 - \sqrt{5} &< \frac{(x_2 - \sqrt{5})^2}{4} < (1/4)^3 = \frac{1}{2^{2^3-2}}
\end{aligned}
$$

Osoitetaan induktiolla:

$$x_n - \sqrt{5} < 2^{-(2^n-2)} \quad \forall n \geq 1$$

Perusaskel: $n = 1$ on selvä, sillä $2^{-(2^1-2)} = 1$ Induktioaskel: Tehdään induktio-oletus: $x_k - \sqrt{5} < 2^{-(2^k-2)}$ jollain $k \geq 1$. Tällöin pätee a-kohdan arvion ja induktio-oletuksen perusteella:

$$x_{k+1} - \sqrt{5} < \frac{(k_n - \sqrt{5})^2}{4} < 2^{-2}2^{-2(2^k-2)} = 2^{-2}2^{(-2^{k+1}+4)} = 2^{-(2^{k+1}-2)}.$$

Induktioperiaatteen nojalla pätee $x_n - \sqrt{5} < 2^{-(2^n-2)} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$. Kokeillaan arvoa $n = 9$. Havaitaan

$$x_9 - \sqrt{5} < 2^{-(2^9-2)} = 2^{-510} < 2^{-400} = 16^{-100} < 10^{-100}.$$

Siis indeksi $n = 9$ kelpaa vastaukseksi.