MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Kotitehtävät 3
26.9.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Vesa Piilola ja Jarno Lintusaari)

KOTITEHTÄVÄT

Olkoon (a_n) lukujono. Lukujonon raja-arvon määritelmän mukaisesti (a_n) suppenee kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista vapaavalintaista lukua $\epsilon > 0$ kohti voidaan määritellä sellainen kynnysarvo n_ϵ, että aina kun $n > n_\epsilon$ pätee:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Tällöin merkitsemme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Todistaessamme raja-arvon olemassaoloa tahdomme arvioida lauseketta $|a_n - a|$ siten, että pääsemme tilanteeseen jossa vain nimittäjässä esiintyy luku n. Koska lausekkeen pitää päteä kynnysarvoa suuremmilla luvuilla n voimme arvioidessa merkitä mistä luvun n arvosta alkaen arviointi on voimassa.

K1. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{3}{2}?$$

Pohdintaa: Jotta lukujono $\frac{3n+2}{2n-3}$ suppenisi kohti lukua 3/2, tutkimme erotusta $\left|\frac{3n+2}{2n-3} - \frac{3}{2}\right|$. Haluamme tehdä erotuksen mielivalaisen pieneksi kunhan n on suurempi kuin jokin kynnys n_ϵ .

$$\left|\frac{3n+2}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n+2) - 3(2n-3)}{2(2n-3)}\right| = \left|\frac{6n+4-6n+9}{4n-6}\right|$$

$$\overset{n\geq 2}{=} \frac{13}{4n-6} \overset{n\geq 2}{\leq} \frac{13}{2n} \leq \frac{14}{2n} = \frac{7}{n}.$$

Nyt huomataan: $\frac{7}{n} < \epsilon$ aina kun $n > \frac{7}{\epsilon}$.

Ratkaisu

Olkoon $\epsilon > 0$ nyt annettu. Voidaan siis valita $n_\varepsilon \geq \max\{2, \frac{7}{\epsilon}\}$, jolloin $\forall n > n_\varepsilon$ pätee yllä olevan arvion nojalla:

$$\left|\frac{3n+2}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{13}{4n-6} \leq \frac{14}{2n} = \frac{7}{n} < \frac{7}{n_\varepsilon} \leq \frac{7}{\frac{7}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{3}{2}.$$

K2. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3} = 0?$$

Ratkaisu. Tutkitaan raja-arvon olemassaoloa lukujonon raja-arvon määritelmän avulla:

$$\left|\frac{3n+2}{2n^2-3} - 0\right| \overset{n\geq 2}{=} \frac{3n+2}{2n^2-3} \leq \frac{3n+n}{2n^2-n^2} = \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Huomataan että $4/n \;<\; \epsilon$, aina kun $n > 4/\epsilon$. Valitaan siis luvuksi $n_\epsilon \geq \max(4/\epsilon, 2)$, jolloin aina kun $n > n_\epsilon$ pätee

$$\left|\frac{3n+2)}{2n^2-3} - 0\right| \leq \frac{4}{n} < \frac{4}{n_\epsilon} \leq \frac{4}{\frac{4}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Siis väite pätee.

K3. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{2n-3} = 1?$$

Pohdintaa: Tarkastellaan jälleen erotusta: $|\frac{3n^2+2}{2n-3} - 1|$:

$$\left|\frac{3n^2+2}{2n-3} - 1\right| = \left|\frac{3n^2+2-2n+3}{2n-3}\right| = \left|\frac{3n^2-2n+5}{2n-3}\right|$$

$$\overset{n\geq 2}{=} \frac{3n^2-2n+5}{2n-3} \geq \frac{3n^2-2n}{2n} = \frac{n(3n-2)}{2n} = \frac{3n-2}{2} \geq \frac{3n-n}{2} = n.$$

Ratkaisu

Siispä jos nyt valitaan $\epsilon = 1$ niin tällöin ei voida löytää raja-arvon määritelmässä vaadittua lukua n_ε, sillä $|\frac{3n^2+2}{2n-3} - 1| \geq n > \epsilon$ aina kun $n > 2$.

K4. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{2}{3}?$$

Ratkaisu. Tarkastelemalla annettua lauseketta, vaikuttaisi siltä että lukujonon raja-arvo olisi pikemminkin $3/2$, kuin $2/3$ (mikä se onkin). Tämän voi nähdä muun muassa siitä, että lausekkeen vakiotermit menettävät merkitystään luvun n kasvaessa.

Väitetään siis, että tehtävän väite ei päde. Tämä voidaan osoittaa siten, että arvioidaan raja-arvon määritelmästä saatavaa lauseketta

$$\left|\frac{3n+2}{2n-3}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{9n+6-4n+6}{6n-9}\right| = \left|\frac{5n+12}{6n-9}\right|$$

alaspäin, eli pyritään löytämään jokin reaaliluku, jota isompi lausekkeen arvo aina välttämättä on, kunhan n on riittävän iso. Tällöin raja-arvon määritelmän vaatimus, että edellä oleva lauseke saataisiin pienemmäksi kuin mikä tahansa $\epsilon > 0$ kaikilla $n > n_\epsilon$, ei toteudu. Arvioidaan lauseketta alaspäin:

$$\left|\frac{5n+12}{6n-9}\right| \overset{n\geq 2}{=} \frac{5n+12}{6n-9} \geq \frac{5n}{6n} = \frac{5}{6}.$$

Jos nyt esimerkiksi valitsemme $\epsilon = 1/6$, niin näemme suoraan, että

$$\left|\frac{5n+12}{6n-9}\right| \geq \frac{5n}{6n} = \frac{5}{6} \not< \epsilon.$$

K5. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3-3} = 0$$

todeksi.

Osoitetaan väite raja-arvon määritelmän perusteella. Haluamme jälleen tehdä erotuksen $|\frac{n^2+3}{5n^3-3} - 0|$ mielivaltaisen pieneksi kun n on suurempaa kuin jokin kynnys n_ε.

Pohdintaa:

$$\left|\frac{n^2+3}{5n^3-3} - 0\right| = |\frac{n^2+3}{5n^3-3}| \overset{n\geq 2}{=} \frac{n^2+3}{5n^3-3} \overset{n\geq 3}{\leq} \frac{n^2+3n^2}{5n^3-n^3} = \frac{4n^2}{4n^3} = \frac{1}{n}$$

Huomataan, että $\frac{1}{n} < \epsilon$ kun $n > \frac{1}{\epsilon}$

Ratkaisu

Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Voidaan valita $n_\varepsilon \geq \max\{3, \frac{1}{\epsilon}\}$. Tällöin kaikilla $n > n_\epsilon$ pätee:

$$\left|\frac{n^2+3}{5n^3-3} - 0\right| \leq \frac{4n^2}{4n^3} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3-3} = 0.$$

K6. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3-3} = 1$$

epätodeksi.

Ratkaisu. Huomataan, että väite on epätosi jo pelkästään raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla (ks. edellinen tehtävä). Osoitetaan väite epätodeksi raja-arvon määritelmän avulla seuraten tehtävän K4 kulkua.

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2}{5n^3-3} - 1\right| &= \left|\frac{n^2+3-5n^2+3}{5n^3-3}\right| = \left|\frac{-5n^3+n^2+6}{5n^3-3}\right| \overset{*n\geq 6}{=} \frac{5n^3-n^2-6}{5n^3-3} \\ &\geq \frac{5n^3-n^3-n^3}{5n^3} = \frac{3n^3}{5n^3} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Nyt kun valitaan esimerkiksi $\epsilon = 1/5$, niin nähdään suoraan että

$$\left|\frac{n^2}{5n^3-3} - 1\right| \geq \frac{3}{5} \not< \epsilon$$

millään luvulla $n > 6$. Siis tehtävän lukujonon raja-arvo ei ole luku 1.

---

*Arvio perustuu siihen, että kun n > 6, niin $n^2+6 < n^2+n < 4n^3+n^3 = 5n^3$, eli $-5n^3+n^2+6 < 0$.

K7. Oletetaan, että $a < \lim_{n\to\infty} x_n < b$. (Oletus sisältää tiedon, että tutkittava jono suppenee.) Osoita, että on olemassa sellainen K, että $a < x_n < b$ kaikilla $n > K$. Tämäkin tehtävä on tarkoitus tehdä käyttäen suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää.

Ratkaisu

Merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = C$. (Näin voidaan tehdä koska oletuksen nojalla tiedämme, että lukujono suppenee.)

Huomataan, että $a < C < b$. Olkoon nyt $\epsilon = \min\{b-C, C-a\}$ Nyt raja-arvon määritelmän nojalla voidaan löytää luku n_ε, jolla $|x_n - C| < \epsilon$ kunhan $n > n_\varepsilon$.

Valitsemalla $K = n_\epsilon$ nyt kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - C| < \epsilon = \min\{b-C, C-a\}.$$

Siten $|x_n - C| < b - C$ ja $|x_n - C| < C - a$

Hyödyntämällä itseisarvolemmaa saamme:

$$|x_n - C| < b - C \Longrightarrow -(b-C) < x_n - C < b - C \Longrightarrow -b + 2C < x_n < b.$$

Vastaavasti:

$$|x_n - C| < C - a \Longrightarrow -(C-a) < x_n - C < C - a \Longrightarrow a < x_n < 2C - a.$$

Nämä yhdistämällä saamme: $a < x_n < b$ kun $n > K = n_\varepsilon$
Tämä todistaa väitteen.

K8. Oletetaan, että lukujono (x_n) suppenee. Oletetaan, että kaikilla n on

$$y_n = (-1)^n x_n.$$

Osoita, että jono (y_n) suppenee, jos $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entä jos luovutaan tästä oletuksesta?

Ratkaisu. Huomataan heti, että $(-1)^n = 1$, kun n on parillinen ja $(-1)^n$ = -1 kun n on pariton. Tarkasteltaessa nyt lukujonoa (y_n) huomataan, että se voidaan esittää myös muodossa

$$(y_n) = -x_1, x_2, -x_3, x_4, \ldots.$$

Koska lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 0, eli sen kaikki termit lähenevät lukua 0 luvun n kasvaessa, näyttäisi siltä, että myäs (y_n) suppenisi kohti lukua 0. Todistetaan tämä lukujonon raja-arvon määritelmän avulla.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska (x_n) suppenee kohti lukua 0, on olemassa sellainen luku n_x, että $|x_n - 0| < \epsilon$ kun $n > n_x$. Olkoon nyt $n > n_x$. Nyt pätee:

$$|(-1)^n x_n - 0| = |(-1)^n x_n| = |(-1)^n||x_n| = 1 * |x_n| = |x_n - 0| < \epsilon.$$

Siis jokaisella $\epsilon > 0$ pätee $|(y_n) - 0| < \epsilon$, kun valitaan kynnysarvoksi jonon (x_n) vastaava kynnysarvo, toisin sanoen $n_\epsilon = n_x$.

Entä jos luovutaan oletuksesta, että (x_n) suppenee nimenomaan kohti lukua 0? Tällöin (x_n) suppenisi kohti jotakin lukua $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tilannetta mietittäessä jonon (y_n) tulisi siis samanaikaisesti supeta sekä lukua $-a$, että lukua a kohti, mikä on ristiriidassa raja-arvon yksikäsitteisyyden kanssa. Edellä mainittu tilanne toteutuu, kun valitaan

$$(x_n) = 1, 1, 1, 1 \ldots$$

jolloin

$$(y_n) = -1, 1, -1, 1 \ldots$$

eikä jonolle (y_n) ole siis olemassa raja-arvoa (vertaa tehtävä E6).