Analyyysi 1, Kotitehtävät 19.9 alkavalle viikolle

Ratkaisuehdotelmia, Katriina K, Olli H

18. syyskuuta 2011

K1. Perustele itseisarvon tarkan määritelmän avulla, että
(a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = |-x|$;
(c) $|xy| = |x||y|$.
(Kumpikin luvuista voi olla toisesta riippumatta < 0, $= 0$ tai > 0. Käy läpi kaikki 9 tapausta.)

Ratkaisu.
(a)

Jos $x < 0$, niin $|x| = -x > 0$.
Jos $x = 0$, niin $|x| = 0$.
Jos $x > 0$, niin $|x| = x > 0$.
Siis kaikissa tapauksissa pätee $|x| \geq 0$.

(b)

Jos $x < 0$, niin $|x| = -x$. Tällöin $-x > 0$, joten $|-x| = -x$.
Jos $x = 0$, niin $|x| = 0 = |-x|$.
Jos $x > 0$, niin $|x| = x$. Tällöin $-x < 0$, joten $|-x| = -(-x) = x$.
Siis kaikissa tapauksissa pätee $|x| = |-x|$.

(c)

Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $xy > 0$ ja $|xy| = xy$. Toisaalta nyt $|x| = x$ ja $|y| = y$, joten $|x||y| = xy = |xy|$.
Jos $x > 0$ ja $y < 0$, niin $xy < 0$ ja $|xy| = -xy$. Toisaalta nyt $|x| = x$ ja $|y| = -y$, joten $|x||y| = -xy = |xy|$.
Samanlaisen päättelyn perusteella yhtälö $|x||y| = -xy = |xy|$ pätee myös silloin, kun $x < 0$ ja $y > 0$.
Jos $x < 0$ ja $y < 0$, niin $xy > 0$ ja $|xy| = xy$. Toisaalta nyt $|x| = -x$ ja $|y| = -y$, joten $|x||y| = -x(-y) = xy = |xy|$).
Jos $x > 0$ ja $y = 0$, niin $xy = 0 = |xy|$. Toisaalta nyt $|x| = x$ ja $|y| = 0$,

joten $|x||y| = 0 = |xy|$.
Samanlaisen päättelyn perusteella yhtälö $|x||y| = 0 = |xy|$ pätee myös silloin, kun $x = 0$ ja $y > 0$.
Jos $x < 0$ ja $y = 0$, niin $xy = 0 = |xy|$. Toisaalta nyt $|x| = -x$ ja $|y| = 0$, joten $|x||y| = 0 = |xy|$.
Samanlaisen päättelyn perusteella yhtälö $|x||y| = 0 = |xy|$ pätee myös silloin, kun $x = 0$ ja $y < 0$.
Jos $x = 0$ ja $y = 0$, niin $xy = 0 = |xy|$. Toisaalta nyt $|x| = 0$ ja $y = 0$, joten $|x||y| = 0 = |xy|$.

Siis kaikissa tapauksissa pätee $|xy| = |x||y|$.

K2. Oletetaan, että $|x - \sqrt{2}| < 2^{-1000}$ ja $|y - \sqrt[3]{3}| < 2^{-1000}$. Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä summien välisestä etäisyydestä $|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})|$?

Ratkaisu.

Lähdetään suoraan tarkastelemaan haluttua summien etäisyyttä. Ensin järjestellään termit uudelleen, sitten käytetään kolmioepäyhtälöä ja lopuksi arvioidaan vielä ylöspäin sijoittamalla tehtävänannon epäyhtälöiden mukaiset luvut.

$$\begin{aligned}|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})| &\leq |(x - \sqrt{2}) + (y - \sqrt[3]{3})| \leq |x - \sqrt{2}| + |y - \sqrt[3]{3}| \\ &< 2^{-1000} + 2^{-1000} = 2 \cdot 2^{-1000} = 2^{-999}\end{aligned}$$

Näin ollen siis

$$|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})| < 2^{-999}.$$

K3. Oletetaan, että $|x - 5| < 4^{-4444}$. Pitääkö välttämättä paikkansa $|x^2 - 25| < 4^{-4442}$? Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|x^2 - 25|$ välillä $]4, 6[$.

Ratkaisu.

Koska $|x - 5|$ on hyvin pieni (x on lähellä lukua 5), voimme surutta olettaa, että $4 < x < 6$. Tällöin $x + 5 < 11$. Saamme

$$\begin{aligned}|x^2 - 25| &\leq |(x + 5)(x - 5)| \leq |x + 5||x - 5| < 11|x - 5| \\ &\leq 11 \cdot 4^{-4444} \leq 16 \cdot 4^{-4444} \leq 4^2 \cdot 4^{-4444} \leq 4^{-4442}.\end{aligned}$$

Väite pitää siis paikkansa.

K4. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikilla välin $]1, 3[$ pisteillä x pätee

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| \leq K|x-2|.$$

Kannattaa laskea itseisarvojen sisällä oleva erotus ja arvioida tämän itseisarvoa ylöspäin niin, että pääset muotoon "vakio kertaa $|x-2|$".

Ratkaisu.

Lasketaan ensin itseisarvojen sisällä oleva erotus:

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| = \left| \frac{7(x+1) - 3(2x+3)}{7(2x+3)} \right| = \left| \frac{x-2}{7(2x+3)} \right| = \frac{|x-2|}{7|2x+3|}$$

Koska x kuuluu välille $]1, 3[$, tiedämme, että x on positiivinen. Siis

$$\frac{|x-2|}{7|2x+3|} = \frac{|x-2|}{7(2x+3)}$$

Nyt voimme arvioida lausekkeen suuruutta. Koska oletuksen mukaan $x > 1$, voimme arvioida

$$\frac{|x-2|}{7(2x+3)} \leq \frac{|x-2|}{7(2+3)} \leq \frac{1}{10}|x-2|.$$

Siis $K = \frac{1}{10}$. (Huomaa, että tämä on vain yksi valinta luvuksi K!)

K5. Oletetaan, että $|x-2| < 10^{-1000}$. Pitääkö paikkansa, että

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| < 10^{-1001}?$$

Kannattaa soveltaa tehtävän K4 tulosta!

Ratkaisu.

Tehtävässä K4 oletimme, että $1 < x < 3$. Koska oletuksen mukaan $|x-2| < 10^{-1000}$, x on hyvin lähellä lukua 2. Toisin sanoen varmasti pätee $1 < x < 3$. Voimme siis huoletta käyttää tehtävän K4 arviointeja hyödyksi. Tiedämme nyt, että

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| \leq \frac{1}{10}|x-2|$$

Koska oletuksen mukaan $|x-2| < 10^{-1000}$, pätee

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| \leq \frac{1}{10}|x-2| < \frac{1}{10}10^{-1000} = 10^{-1001}.$$

K6. Etsi sellainen luku $h > 0$, että

$$\left|\frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7}\right| < 7777^{-7777}$$

aina kun $|x-2| < h$. Kannattaa soveltaa tehtävän K4 tulosta!

Ratkaisu.

Taas voimme olettaa, että x on hyvin lähellä lukua 2 ja näin ollen $1 < x < 3$. Tämän vuoksi voimme käyttää tehtävän K4 arviointeja hyödyksi. Toisin sanoen tiedämme, että

$$\left|\frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7}\right| \leq \frac{1}{10}|x-2|.$$

Etsimme siis sellaista lukua $h > 0$, jolla pätee

$$\frac{1}{10}h < 7777^{-7777}.$$

On siis oltava $h < 10 \cdot 7777^{-7777}$, joten voimme valita $h = 5 \cdot 7777^{-7777}$.
Siis

$$\left|\frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7}\right| < 7777^{-7777}$$

aina kun $|x-2| < 5 \cdot 7777^{-7777}$.

K7. Pitääkö kaikille $x \geq 0$ paikkansa $|\sqrt{x} - 3| \leq \frac{1}{3}|x-9|$? Huom: $3 = \sqrt{9}$.

Ratkaisu.

Käytetään "lavennustemppua"ja lavennetaan käyttäen tekijää $|\sqrt{x}+3|$. Saamme

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x}-3| &\leq \frac{|\sqrt{x}-3||\sqrt{x}+3|}{|\sqrt{x}+3|} \leq \frac{|(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)|}{|\sqrt{x}+3|} \leq \frac{|(\sqrt{x}^2-3^2)|}{|\sqrt{x}+3|} \\
&\leq \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{|x-9|}{3} \leq \frac{1}{3}|x-9|.
\end{aligned}$$

K8. Pitääkö kaikille $x \geq 0$ paikkansa $|\sqrt[3]{x} - 2| \leq \frac{1}{4}|x-8|$? Huom: $2 = \sqrt[3]{8}$. Erotuksen $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}$ käsittelyssä on hyötyä tehtävien alussa annetuista kaavoista.

Ratkaisu.

Ratkaisussa käytetään kaavaa $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Ratkaisemalla tästä $(a-b)$ ja sijoittamalla $a = \sqrt[3]{x}$ ja $b = \sqrt[3]{8}$, saamme

$$\begin{aligned}
|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}| &\leq \left| \frac{\sqrt[3]{x}^3 - \sqrt[3]{8}^3}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{8}^2} \right| \leq \frac{|x-8|}{|\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{8}^2|} \leq \frac{|x-8|}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{8}^2} \\
&\leq \frac{|x-8|}{\sqrt[3]{8}^2} \leq \frac{|x-8|}{2^2} \leq \frac{|x-8|}{4} \leq \frac{1}{4}|x-8|.
\end{aligned}$$

Nimittäjän arvionti perustui tietoon, että $x \geq 0$, jolloin $\sqrt[3]{x} \geq 0$, jolloin myös itseisarvo tällaisia termejä sisältävästä lausekkeesta on lauseke itse ja poistamalla termejä varsinainen osamäärä kasvaa.