Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysi I
Kotitehtävät 1
12.9.2011 alkavalle viikolle
Esimerkkiratkaisuja, Jani Hannula ja Miika Paavola

K1. Osoita, että $\sqrt[3]{2}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu. Todistetaan väite *epäsuoralla todistuksella.* Epäsuorassa todistuksessa oletetaan väitteen negaatio (eli ”vastakohta”) ja päätellään siitä ristiriita. Jos väitteen negaatiosta seuraa ristiriita, on alkuperäisen väitteen oltava totta.

Tehdään vastaoletus: luku $\sqrt[3]{2}$ on rationaalinen. Tämä tarkoittaa sitä, että $\sqrt[3]{2}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\sqrt[3]{2} = p/q$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ ja p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä[1]. Tutkimalla yhtälöä huomataan, että:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \\ \Rightarrow \quad & 2 = \frac{p^3}{q^3} \\ \Rightarrow \quad & p^3 = 2q^3. \end{aligned}$$

Näin ollen luku p^3 on parillinen. Siispä myös luku p on parillinen[2]. Näin ollen luku p voidaan kirjoittaa muodossa $p = 2r$, missä $r \in \mathbb{Z}$. Tutkitaan nyt äsken saatua yhtälöä sijoittamalla $p = 2r$:

$$\begin{aligned} & p^3 = 2q^3 \\ \Rightarrow \quad & (2r)^3 = 2q^3 \\ \Rightarrow \quad & 2^3 r^3 = 2q^3 \\ \Rightarrow \quad & 2 \cdot 2r^3 = q^3. \end{aligned}$$

Näin ollen luku q^3 on parillinen ja siten myös luku q on parillinen. Koska päättelimme aiemmin, että myös luku p on parillinen, seuraa ristiriita sen oletuksen kanssa, ettei p:llä ja q:lla ole yhteisiä tekijöitä. Näin ollen luvun $\sqrt[3]{2}$ on oltava irrationaalinen. $\square$

[1] Tämä perustuu siihen, että luku on rationaaliluku jos ja vain jos se voidaan esittää ”loppuun asti supistettuina” murtolukuna.

[2] Jos luku p olisi pariton, olisi myös luku p^3 pariton.

K2. Osoita, että $\sqrt{6}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu. Vastaoletus: luku $\sqrt{6}$ on rationaalinen. Tämä tarkoittaa sitä, että $\sqrt{6}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\sqrt{6} = p/q$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ ja p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Tutkimalla yhtälöä tehtävän 1 tapaan huomataan, että:

$$\begin{aligned} & \sqrt{6} = \frac{p}{q} \\ \Rightarrow \quad & 6 = \frac{p^2}{q^2} \\ \Rightarrow \quad & p^2 = 6q^2. \end{aligned}$$

Näin ollen luku p^2 on jaollinen luvulla 6. Siispä myös luku p on jaollinen luvulla 6.[3] Näin ollen luku p voidaan kirjoittaa muodossa $p = 6r$, missä $r \in \mathbb{Z}$. Tutkitaan nyt äsken saatua yhtälöä sijoittamalla $p = 6r$:

$$\begin{aligned} & p^2 = 6q^2 \\ \Rightarrow \quad & (6r)^2 = 6q^2 \\ \Rightarrow \quad & 36r^3 = 6q^2 \\ \Rightarrow \quad & 6r^2 = q^2. \end{aligned}$$

Näin ollen luku q^2 on jaollinen luvulla 6 ja siten myös luku q on jaollinen luvulla 6. Seuraa jälleen ristiriita sen oletuksen kanssa, ettei p:llä ja q:lla ole yhteisiä tekijöitä. Näin ollen luvun $\sqrt{6}$ on oltava irrationaalinen. □

K3. Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y, että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nollalla ei saa jakaa?

Ratkaisu. Tapa 1. Jos olisi sellainen yksikäsitteinen luku y, että $0y = 1$ pätisi myös, että:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (0y) = (2 \cdot 0)y = 0y = 1,$$

mikä on selvästi ristiriita, sillä reaalilukujen aksioomien mukaan $0 \neq 1$, mistä seuraa, että $1 \neq 2$. Näin ollen tällaista lukua y ei voi olla olemassa.

[3] Tätä päättelyä ei tällä kurssilla todisteta. Päättely perustuu lukuteorian perustuloksiin, joihin syvennytään kurssilla Algebra I.

Tapa 2. Jos olisi sellainen yksikäsitteinen luku y, että $0y = 1$ pätisi myös, että:

$$1 = 0y = (1-1)y = y - y = 0,$$

mikä on selvästi ristiriita, sillä reaalilukujen aksioomien mukaan $0 \neq 1$. Näin ollen tällaista lukua y ei voi olla olemassa. Nollalla jakamista ei siis voida yksikäsitteisesti määritellä.

Huom. Tehtävissä 4-8 käsitellään epäyhtälöitä tavalla, joka ei luultavasti ole ainakaan lukiosta tuttu. Epäyhtälön ratkaisualueen etsimisen sijaan lausekkeita arvioidaan ylös- tai alaspäin ja vertaillaan toisiinsa epäyhtälöiden avulla. Arvioinnit perustuvat tietoon siitä, että lausekkeen arvo suurenee osoittajan kasvaessa ja pienenee osoittajan pienentyessä. Nimittäjän kasvaessa lausekkeen arvo pienenee ja pienentyessä lausekkeen arvo kasvaa. Näitä arviota voidaan käyttää (ainakin), jos kaikki termit osoittajassa ja nimittäjässä ovat positiivisia.

K4. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Etsi sellainen luku $a > 0$, että

$$\frac{2n+3}{4n^2+5} < \frac{a}{n}.$$

Ratkaisu. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{2n+3}{4n^2+5} < \frac{2n+3}{4n^2} \overset{*}{\leq} \frac{2n+3n}{4n^2} = \frac{5n}{4n^2} = \frac{5}{4n}.$$

Perustelu arviolle * on, että $n \geq 1$, joten $3n \geq 3$. Huomataan, että

$$\frac{5}{4n} \leq \frac{a}{n}, \text{ kun } a \geq \frac{5}{4}.$$

Kysytyksi luvuksi a siis käy mikä tahansa $a \geq 5/4$.

K5. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{n+1}{n^2+2} > \frac{1}{3n}.$$

Ratkaisu. Tapa 1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{n+1}{n^2+2} > \frac{n}{n^2+2} \overset{*}{\geq} \frac{n}{n^2+2n^2} = \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}.$$

Ylläoleva osoittaa väitteen todeksi. Arvio * perustui jälleen siihen, että $n \geq 1$, joten $2n^2 \geq 2$.

Tapa 2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{n+1}{n^2+2} > \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n+n} = \frac{1}{3n}.$$

Ylläoleva osoittaa väitteen todeksi.

K6. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Etsi sellainen luku $a > 0$, että

$$\frac{2n+3}{4n^2+5} > \frac{a}{n}.$$

Ratkaisu. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{2n+3}{4n^2+5} > \frac{2n}{4n^2+5} \overset{*}{\geq} \frac{2n}{4n^2+5n^2} = \frac{2n}{9n^2} = \frac{2}{9n}.$$

Arvio * perustui taas siihen, että koska $n \geq 1$, niin $5n^2 \geq 5$. Huomataan, että:

$$\tfrac{2}{9n} \geq \tfrac{a}{n}, \text{ kun } a \leq \tfrac{2}{9}.$$

Luvuksi a käy siis mikä tahansa luku $0 < a \leq 2/9$.

K7. Osoita, että jos $n > 77^{77}$, niin

$$1 - 77^{-77} < \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Kannattaa tutkia erotusta $1 - \frac{n+1}{n+2}$.

Ratkaisu. Olkoon $n > 77^{77}$ Koska $n+1 < n+2$ kaikilla reaaliluvuilla n, niin $\frac{n+1}{n+2} < 1$. Riittää siis osoittaa vasen epäyhtälö todeksi.

Tutkitaan vihjeen mukaista erotusta:

$$1-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2-n-1}{n+2}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{77^{77}+2}<\frac{1}{77^{77}}=77^{-77}$$

Huomataan:

$$1-\tfrac{n+1}{n+2}<77^{-77}\Leftrightarrow 1-77^{-77}<\tfrac{n+1}{n+2}.$$

Nyt siis:

$$1-77^{-77}<\tfrac{n+1}{n+2}<1.$$

K8. Pitääkö paikkansa: on olemassa sellainen K, että kaikilla $n>K$ pätee

$$1-999^{-999}<\frac{n+1}{n+2}<1.$$

Ratkaisu. Väite pitää paikkaansa. Kuten tehtävässä K7. todettiin, $(n+1)/(n+2)<1$ kaikilla n, joten riittää tutkia vasenta epäyhtälöä. Tutkitaan taas vihjeen mukaista erotusta:

$$1-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2-n-1}{n+2}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n}.$$

Lisäksi $1/n<999^{-999}\Leftrightarrow n>999^{999}$. Näin ollen esimerkiksi $K=999^{999}$ on sellainen luku, että

$$\begin{aligned}1-\frac{n+1}{n+2} &< 999^{-999}\\ \Leftrightarrow 1-999^{-999} &< \frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

kunhan $n>K$.