MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Malliratkaisut, ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 13
Katriina Kerokoski ja Olli Hemminki

K1. Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}.$$

Tarkka perustelu!

Ratkaisu. Lause 5.4 auttaa kovasti. Lauseen perusteella vakiofunktion raja-arvo on vakio itse, tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo, summan raja-arvo on raja-arvojen summa ja osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osamäärä (olettaen, ettei nimittäjä ole nolla). Näiden tietojen siivittämänä voimme alkaa pureksia itse raja-arvoa. Toisaalta pidämme tunnettuna, että

$$\lim_{x \to 2} x = 2.$$

Nyt saamme

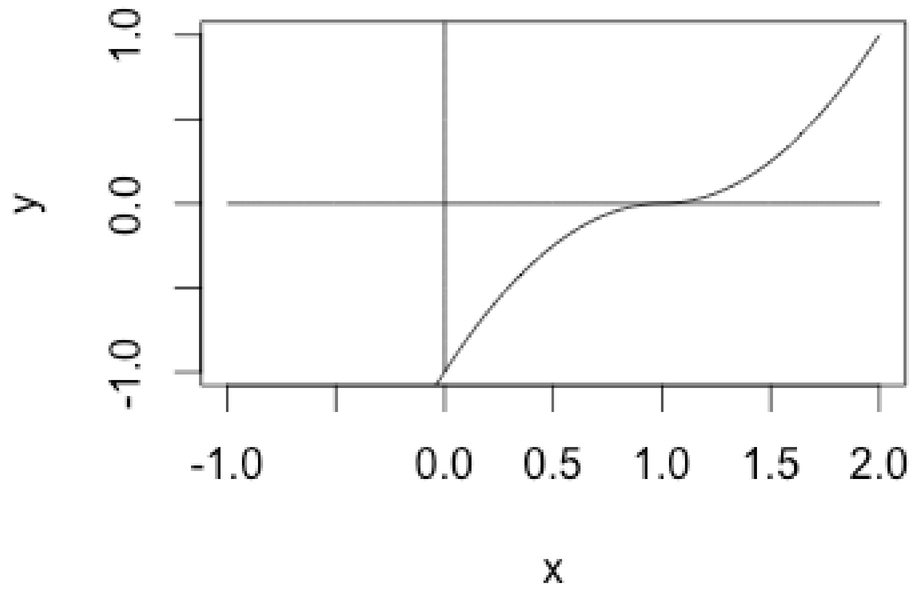
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2}(-1) &= -1 \\
\lim_{x \to 2}(1) &= 1 \\
\lim_{x \to 2} x &= 2 \\
\lim_{x \to 2} x^3 = \lim_{x \to 2} x^2 \cdot \lim_{x \to 2} x &= \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x = 2^3 = 8 \\
\lim_{x \to 2} x^4 = \lim_{x \to 2} x^3 \cdot \lim_{x \to 2} x &= 8 \cdot 2 = 16 \\
\lim_{x \to 2}(x^3 - 1) = \lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2}(-1) &= 8 - 1 = 7 \\
\lim_{x \to 2}(x^4 + 1) = \lim_{x \to 2} x^4 + \lim_{x \to 2} 1 &= 16 + 1 = 17
\end{aligned}$$

ja lopulta

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^3 - 1)}{\lim_{x \to 2}(x^4 + 1)} = \frac{7}{17}.$$

K2. Funktio f toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $f(x) = (x-1)|x-1|$. Onko f derivoituva kohdassa $x = 1$? Tarkka perustelu!

Ratkaisu. Vaikka kuva ei todista matematiikassa mitään, voi kuvaa käyttää intuitionsa apuna. Tehtävän funktio näyttää piirrettynä seuraavalta:



Muotoillaan siis seuraava väite: Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)|x-1|$, on derivoituva pisteessä 1 ja $f'(1) = 0$. Todistetaan tämä.

Funktio f on derivoituva kohdassa 1 ja derivaatan arvo kyseisessä pisteessä on 0, mikäli sillä on olemassa erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 1 raja-arvon ollessa 0. Tutkitaan siis erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 0\right| = \left|\frac{(x-1)|x-1| - (1-1)|1-1|}{x-1}\right| = \left|\frac{(x-1)|x-1| - 0}{x-1}\right| = |x-1| < \epsilon$$

Nyt voimme muotoilla varsinaisen todistuksen. Olkoon siis yllättäen $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \epsilon$, jolloin aina kun $0 < |x-1| < \delta$ pätee

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 0\right| = |x-1| < \delta = \epsilon.$$

Derivaatan määritelmän nojalla funktio f on siis derivoituva kohdassa 1 ja derivaatan arvo on 0.

K3. Osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e^{\sin a}\sin a}{e^{a^2}}.$$

Tehtävässä ei ehkä kannata käyttää derivaattaa.

Ratkaisu. Määritellään aluksi funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = \frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}}$. Tiedetään, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $-1 \leq \sin x \leq 1$, joten kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee myös

$$\frac{1}{e} = e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e^1 = e.$$

Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e}{e^{x^2}}.$$

Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $\sin x = 1$ eli $x = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi palautetaan mieleen, että kun $x < 0$, niin x^2 on vähenevä funktio. Tämän perusteella $\frac{e}{e^{x^2}}$ on kasvava funktio. Vastaavasti, kun $x > 0$, niin x^2 on kasvava funktio ja $\frac{e}{e^{x^2}}$ on vähenevä funktio.

Nyt voimme aloittaa todistuksen. Funktio f on jatkuva ja määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten erityisesti se on jatkuva suljetulla välillä $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weierstrassin min-max-lauseen perusteella funktio f saa tällä välillä suurimman arvon. Olkoon $a \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se piste, jossa funktio saa tämän arvon.

Kun $x < -\frac{3\pi}{2}$, pätee

$$\frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e}{e^{x^2}} \leq \frac{e}{e^{(-3\pi/2)^2}} = f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \leq f(a).$$

Samoin, kun $x > \frac{\pi}{2}$, niin pätee

$$\frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e}{e^{x^2}} \leq \frac{e}{e^{(\pi/2)^2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(a).$$

Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\frac{e^{\sin x}\sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e^{\sin a}\sin a}{e^{a^2}}.$$

K4. Osoita, että kaikilla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pätee

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

Ratkaisu. Tutkitaan aluksi funktiota $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

Huomataan, että

$$f(x) - f(0) = \left(\frac{x^2}{2} + \cos x\right) - \left(\frac{0^2}{2} + \cos 0\right) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1,$$

joten tehtävän väite on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$f(x) - f(0) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0.$$

Tutkitaan seuraavaksi funktion f ensimmäistä ja toista derivaattaa. Huomataan, että $f'(x) = x - \sin x$ ja $f''(x) = 1 - \cos x$. Koska kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $-1 \leq \cos x \leq 1$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee myös $f''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, ja yhtäsuuruus pätee vain yksittäisissä pisteissä. Siis $f'(x)$ on aidosti kasvava. Koska lisäksi $f'(0) = 0 - \sin 0 = 0$, niin $f'(x) > 0$, kun $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Funktio f on jatkuva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja derivoituva välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$, joten voimme käyttää väliarvolausetta tällä välillä. Kaikilla väleillä $]0, x[$, jossa $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on olemassa sellainen ξ, että pätee

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) = f'(\xi)x.$$

Koska $x > 0$ ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, pätee

$$0 < f'(\xi)x = f(x) - f(0) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1,$$

mikä todistaa tehtävän väitteen.