MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät ja kotitehtävät 4

EX TEMPORE TEHTÄVÄT
5.10.2011 alkavalle viikolle
Alustavia ratkaisuehdotuksia
Johanna Kylliäinen Heidi Saukkoriipi Jeremias Berg

Tällä viikolla harjoitellaan raja-arvojen ominaisuuksien käyttöä. Hyödylliseksi työvälineeksi muodostuu lause 4.7 jonka avulla voimme muodostaa monimutkaisempien lausekkeiden raja-arvoja niiden osien avulla. Kuitenkin lauseen käytössä täytyy olla tarkkana. Voidaksemme sanoa mitään esim. osamäärän raja-arvosta täytyy meidän ensiksi varmistua siitä että sekä osittaja ja nimittäjä suppenevat erikseen ja että nimittäjä ei missään vaiheessa saa arvoa 0

Ratkaisuissa käytetään tunnettuina vakiojonon raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty} c = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Sekä tietoa että: $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$. Nämä voidaan helposti todistaa raja-arvon määritelmän avulla.

E1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n}$$

Pohdintaa: Tässä siis haluttaisiin käyttää lausetta 4.7. Kuitenkin voidaksemme soveltaa sitä meidän täytyy ensiksi varmistua lausekkeen ”pienimpien osien” raja-arvojen olemassaolosta. Tutkitaan tehtävän lauseketta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}\right)}$$

Tästä voidaan nähdä ratkaisuun tarvittavat ”rakennuspalikat”.

Ratkaisu: Lauseen 4.7 ja tunnettujen raja-arvojen avulla voidaan muodostaa uusia raja-arvoja aina osoittajan ja nimittäjän lausekkeihin asti. Seuraavissa laskuissa lauseen 4.7 käyttö on merkattu *:llä:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} 2 = 2\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) * = 0\cdot 0 = 0\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} * = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3\cdot 0 = 0\\
&\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{3}{n^2}\right) * = \lim_{n\to\infty} (2) + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 2+0 = 2
\end{aligned}
$$

Nyt saatiin siis osoittajan raja-arvon olemassaolo perusteltua. Kannattaa varmistua että jokaisen lauseen 4.7 käytössä sen vaatimat oletukset oli perusteltu tarpeeksi hyvin. Vastaavasti nimittäjälle:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} 3 = 3\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} * = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} * = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3\cdot 0 = 0\\
&\lim_{n\to\infty} \left(3+\frac{2}{n}\right) * = \lim_{n\to\infty} (3) + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 3+0 = 3
\end{aligned}
$$

Nyt ollaan siis perusteltu sekä osoittajan että nimittäjän raja-arvon olemassaolo ja ratkaisuksi saadaan:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}\right)} * = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)} = \frac{2}{3}
$$

E2. Selvitä raja-arvo

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)}
$$

Pohdintaa: Aika pitkälti edellistä muistuttava tehtävä. Yritetään taas muokata lauseketta sellaisen muotoon josta voitaisi lukea ”rakennuspalikat”.

$$
\frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)} = \frac{3n^2+5n+7}{n^2+6n+8} = \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right)} = \frac{\left(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}
$$

Ratkaisu: Lähdetään taas muodostaamaan tehtävät lauseketta pienemmistä lausekkeista. Nyt voidaan kuitenkin nojautua tehtävässä yksi perusteltuihin raja-arvoihin.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} * = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n} * = 6\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2} * = 7\cdot 0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2} * = 8\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right) * = 0+0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right) * = 0+0 = 0$$

Nyt voimme taas muodostaa tehtävässä mainitun rajaarvon lauseen 4.7 avulla. Huomaa myös että kaksi viimeistäkin perustelua ovat tarpeellisia. Lause 4.7 antaa meille vain oikeuden summata kaksi termiä. Lauseen yleistäminen useammalle termille on suhteellisen helppo induktiotodistus mutta tässä muodossa meidän täytyy käsitellä summaa kaksi termiä kerrallaan.

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right) * = \lim_{n\to\infty}(3) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = 3+0 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right) * = \lim_{n\to\infty}(1) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right) = 1+0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right)} = * \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

E3. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{(n^2+2)(n+4)}$$

Ratkaisu:

Seuraavissa laskuissa lauseen 4.7 käyttö on merkattu *:llä

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{(n^2+2)(n+4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{n^3+4n^2+2n+8} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3})}{n^3(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{8}{n^3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{8}{n^3}}$$

Tarkastellaan ensin osoittajan raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}(3\cdot\frac{1}{n}) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 3\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^3} = \lim_{n\to\infty}(7\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 7\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0$$

Tarkastellaan seuraavaksi nimittäjän raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} (4 \cdot \frac{1}{n}) \stackrel{*}{=} \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 4 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) \stackrel{*}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} = \lim_{n\to\infty} (8 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) \stackrel{*}{=} \lim_{n\to\infty} 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 8 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Lopuksi yhdistetään tulokset ja tarkastellaan osamäärän raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 7}{(n^2+2)(n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{8}{n^3}} \stackrel{*}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = \frac{0 \cdot 0 \cdot 0}{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}$$
$$= \frac{0}{1} = 0$$

E4. Määritä joukon

$$\{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

supremum ja infimum. Onko joukolla suurinta tai pienintä alkiota?

Ratkaisu: Sitten supremumin ja infimumin käyttöä. Merkataan ensiksi joukkoa kirjaimella S ja sen yleistä alkoita x_n. Eli

$$x_n = \frac{n-1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kirjoitetaan nyt näkyviin muutama joukon S alkio, alkaen siitä kun $n = 1$:

$$\frac{1-1}{1} = 0, \quad \frac{2-1}{1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}$$

Huomataan että joukon alkiot tuntuisivat kasvavan n:än kasvaessa. Toisaalta voidaan myös havaita että kaikille n:

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Näistä havainnoista voidaan muodostaa väite

Väite:
$\sup S = 1 \quad \inf S = 0$
Pyritään todistamaan tämä seuraavaksi.

1) sup $S = 1$: Tähän voidaan käyttää monisteen lausetta 2.4. Meidän tarvitsee vain osoittaa että 1 on joukon S yläraja ja että $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_{n_0} \in S$ jolle pätee että $x_{n_0} > 1 - \epsilon$. Aikaisemmin osoitettiin että $\forall n \, x_n < 1$ joten 1 on joukon S yläraja.

Tutkitaan nyt joukon S alkiota, pyritään löytämään sopiva vaihtoehto n_0:ksi:

$$x_n = \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$
$$x_n > 1 - \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

Tämän perusteella voimme osoittaa että joukon supremum tosiaankin on 1.

Todistus: Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt voidaan valita (esim. arkimeedeen lause perustelee tämän) $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Nyt pätee:

$$x_{n_0} = \frac{n_0 - 1}{n_0} = 1 - \frac{1}{n_0} > 1 - \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = 1 - \epsilon$$

Eli joukon S supremum on 1.

2) inf $S = 0$:

Huomataan että:

$$\forall n' : x_{n'} = \frac{n' - 1}{n'} = 1 - \frac{1}{n'} \geq 1 - \frac{1}{1} = 0$$

Ja koska $0 \in S$ niin lauseesta 2.1 seuraa suoraan että inf $S = 0$. Tästä huomataan myös että joukossa on pienin alkio, nimittäin 0. Toisaalta joukossa S ei ole suurinta alkiota. Nimittäin jos joukossa olisi suurin alkio sen pitäisi olla sama kuin joukon supremumin, ja yhtälöllä

$$\frac{n-1}{n} = 1$$

Ei ole ratkaisua kun $n \in \mathbb{N}$.

E5. Oletetaan, että lukujono (x_n) suppenee. Osoita, että on olemassa luku $M > 0$ ja kynnys K, joille kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| \leq M$. (Itse asiassa tässä voi päästä eroon kynnyksestä K.)

Ratkaisu: Sitten suppenevien lukujonojen ominaisuuksia. Koska jono suppenee tuntuu luonnolliselta että sen täytyy jonkun pisteen jälkeen olla "rajoitettu"(eli jokaisen jäsenen täytyy olla pienempi kuin jonkun reaaliluvun M). Muuten jono ei lähestyisi rajatta jotain arvoa vaan "karkailisi äärettömyyteen". (Kannattaa piirtää kuva) Pyritään vielä perustelemaan tämä hieman tarkemmin.

Koska jono (x_n) suppenee voidaan merkitä $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Määritelmän nojalla voimme valita $\epsilon = 1$. ja saada että on olemassa sellainen K että $|x_n - a| < 1$ aina kun $n > K$. Nyt, kolmioepäyhtälön avulla, pätee myös:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

kun $n > K$. Koska $|a| \geq 0$ kaikille a ovat $M = |a| + 1 > 0$ ja suppenemisen määritelmän takaava K kelvolliset valinnat tehtävän osoittamiseksi.

Kynnyksen poistaminen: Äsken osoitettiin siis että kun $n > K$ ja $M = |a| + 1$ niin $|x_n| < M$. Tehtävänanto mainitsee kuitenkin myös että tätä kynnystäkään ei välttämättä tarvitse. Tarkestellaan nimittäin joukkoa $\{x_1, x_2, ..., x_K\}$ Kyseessä on äärellinen joukko, eli voimme käydä läpi kaikki sen alkiot ja löytää niistä suurimman. Merkataan $N = \max\{x_1, x_2, ..., x_K\}$. Jos nyt valitaankin edelisessä tehtävässä $M = max|a| + 1, N + 1$ niin aivan kaikille x_n pätee:

$$|x_n| < \begin{cases} N + 1 \leq M & n \leq K \\ |a| + 1 \leq M & n > K \end{cases}$$

E6. Oletetaan, että

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku K, jolle kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$. Tehtävä on erityisen "läpinäkyvä", jos tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Piirrä kuva kummastakin tapauksesta.

Ratkaisu: Osoitetaan lisää suppenevien lukujonojen ominaisuuksia. Kuvan piirrolla tämä tehtävä selkiää kummasti, tarkoituksena olisi osoittaa että suppenevan jonon alkioiden itseisarvot ovat alhaalta rajoitettuja. Tämäkin tuntuisi aika intuitiiviselta koska muuten jonon jäsenet "karkaisivat negatiiviseen äärettömyyteeen". Kuitenkin tässäkin vaaditaan hieman tarkempaa perustelua.

Valitaan $\epsilon = \frac{1}{2}|a|$. Koska jono suppenee on raja-arvon määritelmän mukaan olemassa sellainen K että kun $n > K$ niin:

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}|a|\text{IAL} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}|a| < x_n - a < \frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow a - \frac{1}{2}|a| < x_n < \frac{1}{2}|a| + a$$

Nyt tarkastellaan kahta eri tapausta. Joko $a > 0$ tai $a < 0$.
1) $a > 0$:
Nyt $|a| = a$ ja $a - \frac{1}{2}|a| = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}|a| > 0$. Tästä seuraa myös että kun $n > K$:

$$0 < \frac{a}{2} = \frac{1}{2}|a| < x_n$$

Ja koska $x_n > 0$ niin $|x_n| = x_n$. Eli:

$$0 < \frac{a}{2} = \frac{1}{2}|a| < x_n = |x_n|$$

2) $a < 0$:
Eli $|a| = -a$ ja $a - \frac{1}{2}|a| = a - \frac{-a}{2} = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$. Nyt saadaan myös (edelleen kun $n > K$):

$$x_n < \frac{1}{2}|a| + a = \frac{1}{2}a < 0$$

Eli $x_n < 0 \Leftrightarrow |x_n| = -x_n$ Nyt voidaan jatkaa aikaisempaa:

$$x_n < \frac{1}{2}a \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a < -x_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a| < |x_n|$$

Eli taas saatiin todistettua haluttu väite.

E7. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = 2x_n + 1$. (a) Yritetään määrittää tämän jonon "mahdolllinen raja-arvo" ja sjioitetaan x jonon jäsenen paikalle palautuskaavassa. Muodosta tämä yhtälö. Onko sillä ratkaisua? (b) Suppeneeko jonomme?

Ratkaisu (a):
Merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
Tällöin myös $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2x_n + 1 = 2x + 1$
Siis

$$\begin{aligned} x &= 2x + 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ratkaisu (b):
Jonon mahdollinen raja-arvo olisi a)-kohdan perusteella täten -1.
Tarkastellaan jonon jäseniä hieman tarkemmin:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ x_3 &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Näyttäisi, että jono on kasvava. Tutkitaan asiaa tarkemmin.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{2x_n + 1} < \frac{x_n}{2x_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Kyseessä on siis kasvava jono, jonka kaikki jäsenet ovat suurempia kuin -1 eli voimme olettaa, että -1 ei ole jonon raja-arvo eli täten jono hajaantuu. *Todistus:* $|x_n - (-1)| = |x_n + 1| = x_n + 1 \geq x_1 + 1 = 1 + 1 = 2$.
Valitaan $\epsilon = 1$. Nyt ei ole olemassa kynnysarvoa K s.e. $|x_n - (-1)| < \epsilon$, kun $n > K$.

E8. Induktio!?!?... Mitä tiedät siitä? Mitä haluat tietää siitä? Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Ratkaisu: Käytetään induktiotodistusta. Näytetään ensin, että väite pätee, kun $n = 1$ (alkuaskel):

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 = 1^2.$$

Näytetään nyt, että mikäli väite pätee, kun $n = k$, niin se pätee myös, kun $n = k + 1$. Tehdään siis induktio-oletus eli oletetaan, että väite pätee, kun $n = k$ eli

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Nyt

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &\overset{ind.ol}{=} \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \frac{1}{6} \cdot 6(k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)
\end{aligned}$$

joten väite pätee myös arvolla $n = k + 1$. Siispä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.