MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 8
7.11.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään vielä funktion raja-arvoihin liittyviä kysymyksiä.

Huom. Periaatteessa derivaatta ja sen mekaaninen käyttö ovat tuttuja lukion (pitkästä) matematiikasta. Mutta ehkä asia ei ole sinulle kuitenkaan täysin selvä. Siksi kannattaa kysyä derivaatasta luennoilla. Lisäksi käynnistän kurssin moodleen keskustelun derivaatasta.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Oletetaan, että $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{x\to 1} f(2x) = 7$.

E2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

ja

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Entä

$$\lim_{x\to 1-} \frac{2+\sin x}{x-1}?$$

Tässä saat käyttää kaikkea koulussa sinifunktiosta oppimaasi.

E3. Käy läpi lauseen 5.6 todistus.

E4. Todista monisteen sivun 37 lemma 5.7.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7}.$$

K2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1}{7x^3 + 1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{5 + x}{3 - x} = -\infty.$$

K4. Oletetaan, että funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikille $n = 0, 1, 2, \ldots$ ehdot $f(x) = x - 2n$ kun $2n \leq x \leq 2n + 1$ ja $f(x) = 2n + 2 - x$ kun $2n + 1 < x < 2n + 2$. Piirrä funktion kuvaaja. Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} f(x)?$$

K5. Oletetaan, että $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x).$$

K6. Oletetaan, että $f(x) \to a$ ja $g(x) \to b$ kun $x \to \infty$. Osoita, että $f(x) + g(x) \to a + b$ kun $x \to \infty$.

K7. Oletetaan, että $f :] - 4, 6[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(5) = 2$ ja $f'(5) = 3$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla x pätee: jos $5 < x < 5 + \delta$, niin $(3 - \frac{1}{7})(x - 5) < f(x) - 2 < (3 + \frac{1}{7})(x - 5)$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$. Kun $|x - 5|$ kyllin pieni (ja $x \neq 5$), niin $|E(x) - 3| < \frac{1}{7}$ …Kannattaa piirtää kuva!)

K8. Edellisessä tehtävässä tarkastellaan arvoja $x > 5$. Muotoile ja todista vastaava arvoja $x < 5$ koskeva väite. (Tässä ja tehtävässä K7 on positiivinen luku $\frac{1}{7}$ erityisasemassa. Onko taustalla jokin kaikkia positiivisia lukuja koskeva tieto?)