MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 7
31.10.2011 alkavalle viikolle

Tervetuloa analyysin kurssin toiselle periodille. Erona ykkösperiodiin tulee olemaan, että nyt viikottain meillä on 4 ex tempore -tehtävää, joita on tarkoitus käyttää kotitehtävien ohessa, mikäli niille jää aikaa. Kotitehtäviä on edelleen 8 mutta nyt pääaineopiskelijoiden harjoituksissa ne on tarkoitus jakaa (suunnilleen) 4 + 4 alku- ja loppuviikon kesken.

Tällä viikolla palautetaan mieleen funktion raja-arvon käsitettä. Muistetaan, että jatkuvuus ja derivaatta ovat meille viime periodilta tuttuja esimerkkejä raja-arvon käsitteestä.

Huom. Periaatteessa derivaatta ja sen mekaaninen käyttö ovat tuttuja lukion (pitkästä) matematiikasta. Mutta ehkä asia ei ole sinulle kuitenkaan täysin selvä. Siksi kannattaa kysyä derivaatasta luennoilla. Lisäksi käynnistän kurssin moodleen keskustelun derivaatasta.

## EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

on tosi.

E2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

on epätosi.

E3. Määritellään funkto $f : ]0,3[ \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f$ on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja että $f'(1) = -\frac{1}{9}$.

E4. Onko funktio $f(x) = |x|$ derivoituva kohdassa $x = 0$ ? Tarkka perustelu derivoituvuuden ja funktion raja-arvon määritelmien avulla!

KOTITEHTÄVÄT

K1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

on tosi.

K2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

on epätosi.

K3. Määritellään funkto $f : ]1, 4[ \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f$ on derivoituva kohdassa $x = 3$ ja että $f'(3) = -\frac{1}{49}$.

K4. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x = 16$.

K5. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x = 16$ ja että $f'(16) = 1/8$.

K6. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio $f$ on määritelty kaikilla $x \in ]x_0 - h, x_0 + h[$ ja että $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen. (Voit myös yrittää käyttää ”kolmioepäyhtälön vasenta puolta”.)

K7. Oletetaan, että funktio $g$ toteuttaa kaikilla $x \in ]-1, 1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituvaa kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun $x$ on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun $x$ on irrationaalinen. Funktio voi olla siis tehtävän tuloksen perusteella olla derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)

K8. Määritellään

$$g(x) = \frac{7}{x^{66} + 3x^{44} + 5x^{22} + 7}.$$

Määritellään funktio $f$ yhtälöllä $f(x) = xg(x)$.

(a) Onko funktio $f$ jatkuva kohdassa $x = 0$?

(b) Muotoile (a)-kohdan tuloksesi yleiseksi lauseeksi ja todista se. Vihje: tehtävästä K7 voi ottaa mallia.