

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 13

12.12.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan kurssikoetta varten. Kotitehtävät ovat muunnelma viime syksyn kurssikoosteesta. Tällä kertaa lämmittelytehtävinä on saman tapainen tehtäväsarja kuin kotitehtävinä.

LÄMMITTELYTEHTÄVIÄ

L1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}.$$

Tarkka perustelu!

L2 Funktio f toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $f(x) = |x|^3$. Onko f derivoituva kohdassa $x = 0$? Tarkka perustelu!

L3 Osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\frac{\sin(e^x)}{x^2 + 1} \leq \frac{\sin(e^a)}{a^2 + 1}.$$

Tehtävässä ei ehkä kannata käyttää derivaattaa.

L4 Määritellään funktio $f:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Osoita, että f on aidosti vähenevä.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}.$$

Tarkka perustelu!

K2. Funktio f toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $f(x) = (x-1)|x-1|$. Onko f derivoituva kohdassa $x = 1$? Tarkka perustelu!

K3. Osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\frac{e^{\sin x} \sin x}{e^{x^2}} \leq \frac{e^{\sin a} \sin a}{e^{a^2}}.$$

Tehtävässä ei ehkä kannata käyttää derivaattaa.

K4. Osoita, että kaikilla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pätee

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$