MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 12
5.12.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen lopussa tarkasteltuja alkeisfunktiota. Samalla tehtävissä tulee esille suuri osa syksyn mittaan opiskeltua.

Tuttuja ex tempore tehtäviä ei tällä kertaa ole mukana. Ex temnpore tehtävät ovat olleet kakkosperiodin ajan viime syksyn ohjaustehtäviä ja nyt halusin sisällyttää näitä kotitehtäviin.

LÄMMITTELYTEHTÄVIÄ

L1 Derivoi $x^{\frac{2}{3}}$
(a) tulkiten ko. funktio yhdistetyksi funktioksi ja käyttäen potenssin ja käänteisfunktion derivoimissääntöjä;
(b) soveltaen potenssin derivointisääntöä murtopotenssiin.

L2 Missä funktio $\sin x$ on konveksi?

L3 Hahmottele samaan kuvaan kuvaajat lausekkeille e^x, e^{-x} ja $-e^{-x}$. Huomaa "peilaukset". Hahmottele näiden avulla kuvaajat hyperbolisille funktioille sinh ja cosh.

L4 Laske $f'(2)$ kun kaikilla x on $f(x) = \operatorname{arsinh} x$.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Osoita juuren määritelmän ja potenssin (eksponenttina kokonaisluku) laskusääntöjen avulla, että kun $x > 0$, pätee
(a)
$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$
(b)
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

K2. Määritä

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(\frac{1}{x})}{1-x}.$$

Voit huomata, että kyseessä on erotusosamäärä. Voit myös käyttää l'Hospitalin säännön helpointa muotoa sivulta 62 (mikä on itse asiassa sama asia.)

K3. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \log(x^2 + 1).$$

Missä funktio f on konveksi?

K4. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x$. Tutki erotusta. Väliarvolause auttaa. (Jos aikaa jää, niin voit jatkaa seuravalla väitteellä: Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.)

K5. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = x + \sin x$ ja $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Selvitä funktioiden lokaalit ääriarvot.

K6. Johda funktion $\sinh x$ käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki monistetta sivuilta 84 ja 85.

K7. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

(Tehtävä on ensimmäinen askel kohti jännittävämpää havaintoa. Mikäli mahdollista, kannattaa tarkastella graafisella laskimella piirrettyjä funktioiden $\cos x$ ja $2 - \cosh x$ kuvaajia välillä $[-1, 1]$. Näet jotain, mikä vaatii selitystä. Selitystä voi antaa tällä kurssilla väliarvolauseen avulla. Mutta luontevampi selvyys asiaan tulee kurssilla analyysi II Taylorin polynomien yhteydessä.)

K8. Johda yhtälö

$$D\text{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

kun $x > 1$. Tutki monisteen sivuja 84 ja 85!