MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 11
28.11.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen lukuun 8 - väliarvolause jne. - liittyviä kysymyksiä. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Osa tehtävistä muistuttaa koulutehtäviä: perustele ratkaisusi tämän kurssin lauseiden avulla.

LÄMMITTELYTEHTÄVIÄ

L1 Tarkastellaan funktiota funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = x^2$. Määritä väliarvolauseessa mainittu kohta ξ.

L2 Tarkastellaan funktiota funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = x^4$. Määritä väliarvolauseessa mainittu kohta ξ.

L3 Oletetaan, että funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivaatta on kaikkialla positiivinen. Miten väliarvolauseesta seuraa, että f on aidosti kasvava.

L4 Tarkastellaan jatkuvaa funktiota $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ ja oletetaan, että kaikilla $x \in]0, 7[$ pätee, että $|f'(x)| \leq 10^{-3}$. Päteekö kaikilla välin $[0, 7]$ pisteillä x ja t, että $|f(x) - f(t)| \leq 10^{-2}$? ”Väliarvolause plus itseisarvot”!

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Tutki funktion $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = |(x - 2)^2 - 1|$$

kaikilla $x \in [0, 7]$. Huolelliset perustelut! (Tarkista monisteen sivulta 57, miten lokaaliset ääriarvot määritellään siellä.)

E2. Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee

(a) $f'(x) \leq 1$;
(b) $f'(x) \leq x^7$.
Mitä tapauksissa (a) ja (b) tiedetään arvosta $f(1)$, jos $f(0) = 2$? (b)-kohdassa kannattaa tutkia lausekkeella $\frac{1}{8}x^8 - f(x)$ määriteltyä "apufunktiota".

E3. Oletetaan, että $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]-1, 1[$ pätee, että $|f'(x)| \leq 10$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikilla $x, y \in [-1, 1]$ pätee: jos $|x - y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < 10^{-2010}$.

E4. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^7$ on kaikkialla määritelty käänteisfunktio $\sqrt[7]{y}$. Missä tämä on derivoituva? Pohdi erityisesti kohtaa $y = 0$. Monisteesta kannattaa katsoa sivuja 43 ja 50.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Oletetaan, että funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $]0, 1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$?

K2. Oletetaan, että funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $]0, 1[$. Oletetaan, että $f(1) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(0)$?

K3. Oletetaan, että funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $]0, 1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $f'(x) < x$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $g'(x) > 0$.

K4. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä
$]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$. Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.

K5. Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x ns. neliösumma

$(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

K6. Oletetaan, että funktio $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0)=3$ ja että kaikilla $x\in]0,1[$ pätee $f'(x)>x^2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x\in]0,1[$ pätee $g'(x)>0$.

K7. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x-1|\leq|x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0=1$.)

K8. (a) Oletetetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$ ja että C >0. Oletetaan, että kaikilla $x\in]a,b[$ pätee $|f'(x)|\leq C$. Osoita, että kaikilla $x,t\in[a,b]$ pätee $|f(x)-f(t)|\leq C|x-t|$.

(b) Oletetetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$ että C >0. Oletetaan, että kaikilla $x,t\in[a,b]$ pätee $|f(x)-f(t)|\leq C|x-t|$. Onko f välttämättä derivoituva välillä $]a,b[$?

(c) Oletetetaan, että C >0. Oletetaan, että kaikilla $x,t\in[a,b]$ pätee

$$|f(x)-f(t)|\leq C|x-t|\sqrt[42]{|x-t|}\ \left(=C|x-t|^{\frac{43}{42}}\right).$$

Osoita, että f on vakiofunktio. Kannattaa tutkia erotusosamäärää. (Mikähän on oleellista eksponentissa $\frac{43}{42}$? Murtopotenssit tullaan pian määrittelemään potenssien ja juurien yhdistettyinä funktioina. Tässä pieni ”varaslähtö”.)