MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 10
21.11.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion derivoituvuuteen liittyviä kysymyksiä. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Tällä viikolla tehtäväsarjassa on ”yleisön pyynnöstä”myös lämmittelytehtäviä. Niitä ei ole tarkoitus käsitellä harjoituksissa ja niista ei laadita malliratkaisuja. Mutta niistäkin voi keskustella kurssin moodlessa. Myös oheisia ex tempore- tehtäviä voi käyttää ”lämmittelyyn”ja usein niidenkin joukossa on varsinaisiin harjoitustehtäviin johdattavia kysymyksiä.

LÄMMITTELYTEHTÄVIÄ

L1 Derivoi

$$\frac{x^3+1}{x^2+1}.$$

L2 Derivoi

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x^2+1}}.$$

L3 Sovella käänteisfunktion derivointikaavaa kuutiojuurifunktion derivoimiseen. Missä kuutiojuuri ei ole derivoituva?

L4 Määritellään $f(x) = 3x$.Tulkitse havainto $f(x + h) = 3(x + h) = 3x + 3h = f(x) + 3h$ karakterisaatiolauseen avulla. Voidaanko tästä päätellä suoraan funktion f derivaattafunktio?

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Määritellään $f(x) = x^2$. Esitä funktion muutos muodossa

$$f(1 + h) = f(1) + 7h + h\alpha(h) = 1 + 7h + h\alpha(h).$$

Onko tulos ristiriidassa karakterisaatiolauseen kanssa?

E2. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1, 3]$ ja derivoituva välillä $]1, 3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1, 3[$ pätee $1 < f'(x) < 4$. Mitä tiedetään arvosta $f(3)$, jos $f(1) = 1$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

E3. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1, 3]$ ja derivoituva välillä $]1, 3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1, 3[$ pätee $1 < f'(x) < 4$. Mitä tiedetään arvosta $f(1)$, jos $f(3) = 1$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

E4. (Tulon derivoituvuussäännön johtaminen karakterisaatiolauseen avulla.) Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa x. Tällöin karakterisointilauseen nojalla on

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$

ja

$$g(x + h) = g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h),$$

missä $\varepsilon_1(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Muokkaa tuloa

$$(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))$$

ja päättele sekä tulon fg derivoituvuus kohdassa x että tulon derivointisääntö.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

K2. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt{x}$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -\sqrt{-x}$ kun $x < 0$. Missä f on derivoituva?

K3. Derivoi

(a) $\sin^3 x^4$;

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

K4. Oletetaan, että $f'(1) = 4$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

K5. Tarkastellaan funktiota $f :]0, 64[\to]0, 12[$, jolle pätee $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ kaikilla $x \in]0, 64[$. Miksi sillä on aidosti kasvava (jatkuva) ja derivoituva käänteisfunktio $g :]0, 12[\to]0, 64[$? Määritä $g'(2)$.

K6. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2$. Tulkitse yhtälö

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

K7. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^5$. Tulkitse yhtälö

$$(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

K8. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Osoita ensin , että $f'' > 0$. Sovella Rollen lausetta ensin yhtälön peräkkäisten juurten välissä ja sitten uudestaan derivaattafunktioon.