MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät 5

10.10.2011 alkavalle viikolle
Alustavia ratkaisuehdotuksia
Miika Paavola ja Jani Hannula

E1. Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

Ratkaisu. Arvioinnissa auttaa Bernoullin epäyhtälö: jos $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ ja $x \neq 0$, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee:
$$(1+x)^2 \geq 1 + nx.$$
Siispä erityisesti $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$. Tutkitaan nyt etäisyyttä $|1/3^n - 0|$:
$$\left|\frac{1}{3^n} - 0\right| = \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}.$$
Halutaan siis, että $1/n < \varepsilon$, mikä tarkoittaa, että on oltava $n > 1/\varepsilon$. Näistä havainnoista voidaan koota todistus.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $K \in \mathbb{N}$, että $K \geq 1/\varepsilon$. Tällöin, jos $n > K$ niin
$$\left|\frac{1}{3^n} - 0\right| = \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{K} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$
Näin ollen $\lim_{n\to\infty}(1/3^n) = 0$.

E2. Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty.$$

Ratkaisu. Riittää osoittaa: kun $M \in \mathbb{R}$, löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}$ jolle pätee: kun $n > K$, niin $n^2 - n > M$.
Arvioidaan lauseketta: $n^2 - n = n(n-1) \overset{n \geq 2}{\geq} n$. Huomataan, että $n > M$, kun $n > M$.

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan $K > max\{2, M\}$. Kun $n > K$:
$n^2 - n > n > K > M$ Joten siis:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty.$$

E3. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+1} = \infty.$$

Ratkaisu. Aloitetaan arvioimalla osamäärää $(n^2+1)/(n+1)$ alaspäin:

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n-1.$$

Nyt huomataan, että $n - 1 > M$, jos $n > M + 1$.

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan sellainen $K \in \mathbb{N}$, että $K \geq M + 1$. Tällöin, jos $n > K$ niin

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n-1 > K-1 \geq M+1-1 = M.$$

Näin ollen $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)/(n+1) = \infty$.

Vaihtoehtoisesti arviointi voidaan tehdä seuraavasti:

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2}.$$

Nyt huomataan, että $n/2 > M$, jos $n > 2M$.

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan sellainen $K \in \mathbb{N}$, että $K \geq 2M$. Tällöin, jos $n > K$ niin

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2} > \frac{K}{2} \geq \frac{2M}{2} = M$$

Näin ollen $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)/(n+1) = \infty$.

E4. Määritellään $x_1 = 2$ ja $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$. Suppeneeko jono?

Ratkaisu. Tässä tehtävässä käytämme lausetta 4.3: Jos jono (x_n) suppenee kohti lukua a, niin sen jokainen osajonokin suppenee kohti lukua a. Tarkastellaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä:

$x_1 = 2,$
$x_2 = 1 - 1/x_1 = 1 - 1/2 = 1/2,$
$x_3 = 1 - 1/x_2 = 1 - 1/(1/2) = 1 - 2 = -1,$
$x_4 = 1 - 1/x_3 = 1 - (-1) = 2.$
Huomataan että $x_1 = x_4 = x_{3n-2} = 2$, $x_2 = x_5 = x_{3n-1} = 1/2$ ja $x_3 = x_6 = x_{3n} = -1$. Valitaan lukujonon (x_n) osajonot $(y_n) = (x_{3n-2}) = (2, 2, 2, 2, ...)$ ja
$(z_n) = (x_{3n-1}) = (1/2, 1/2, 1/2, ...)$.
Nyt $lim_{n\to\infty} y_n = 2$ ja $lim_{n\to\infty} z_n = 1/2$
Nyt löysimme kaksi lukujonon (x_n) osajonoa, jotka suppenevat kohti eri lukuja. Lauseen 4.3 perusteella lukujono (x_n) ei siis suppene.

E5. Osoita, että

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3.$$

Ratkaisu. Tutkitaan etäisyyttä $|(x+1)/(x-1) - 3|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+1}{x-1} - 3 \right| &= \left| \frac{x+1-3(x-1)}{x-1} \right| = \left| \frac{-2x+4}{x-1} \right| = \left| \frac{-2(x-2)}{x-1} \right| \\ &= \frac{|-2||x-2|}{|x-1|} = \frac{2|x-2|}{|x-1|}. \end{aligned}$$

Tehdään nyt oletus siitä, "kuinka lähellä lukua 2 ollaan", jotta voitaisiin arvioida nimittäjässä olevaa termiä. Oletetaan, että $3/2 < x < 5/2$, jolloin $|x-1| = x - 1 \geq 1/2$. Nyt siis

$$\frac{2|x-2|}{|x-1|} \leq \frac{2|x-2|}{1/2} = 4|x-2|.$$

Halutaan, että $4|x-2| < \varepsilon$, joten on siis oltava $|x-2| < \varepsilon/4$. Kootaan vielä muodollinen todistus.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1/2, \varepsilon/4\}$ [1]. Nyt, jos $0 < |x-2| < \delta$,

[1] Tämä tekninen yksityiskohta tarkoittaa sitä, että otetaan huomioon arvioinnissa käytetty oletus siitä, että $3/2 < x < 5/2$. Jos valittaisiin vain $\delta = \varepsilon/4$ ei oletuksemme pätisi esimerkiksi tapauksessa $\varepsilon = 4$.

niin

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+1}{x-1}-3\right| &= \left|\frac{-2x+4}{x-1}\right| = \left|\frac{-2(x-2)}{x-1}\right| = \frac{|-2||x-2|}{|x-1|} = \frac{2|x-2|}{|x-1|}\\ &\leq \frac{2|x-2|}{1/2} = 4|x-2| < 4\delta \leq 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1} = 3.$$

E6. Määritellään $f(x) = x^2 + 3x$. Osoita, että

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 10.$$

Ratkaisu. Tehdään jälleen oletus siitä, ”kuinka lähellä lukua 2 ollaan:”
$0 < |x-2| < \delta < 1 \overset{IAL}{\Leftrightarrow} -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
Tarkastellaan erotusta: $|x^2+3x-10| = |x^2+3x-6-4| = |x^2-4+(3x-6)| = |(x-2)(x+2)+3(x-2)| = |(x-2)(3+2+x)| = |(x-2)(x+5)| = (x+5)|x-2| < 8|x-2|$. Huomataan että: $8\delta < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \varepsilon/8$.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta < min\{\varepsilon/8, 1\}$.
Nyt $|f(x) - 10| < 8|x-2| < 8\delta < 8 * \varepsilon/8 = \varepsilon$. Siis

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 10.$$

E7. Määritellään $f(x) = x^2 + 3x$. Osoita, että

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7.$$

Osaatko tulkita tuloksen derivaattana?

Ratkaisu. Tutkitaan annetun (erotus)osamäärän etäisyyttä luvusta 7:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-7\right| &= \left|\frac{(2+h)^2+3(2+h)-(2^2+3\cdot 2)}{h}-7\right| \\
&= \left|\frac{4+4h+h^2+6+3h-4-6}{h}-7\right| \\
&= \left|\frac{h^2+7h}{h}-7\right| \\
&= |h+7-7| = |h| = |h-0|.
\end{aligned}$$

Huomataan siis, että alkuperäinen lauseke saadaan pienemmäksi kuin mikä tahansa $\varepsilon > 0$, kunhan $|h-0| < \varepsilon$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$. Nyt, kun $0 < |h-0| < \delta$, niin

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-7\right| &= \left|\frac{(2+h)^2+3(2+h)-(2^2+3\cdot 2)}{h}-7\right| \\
&= \left|\frac{4+4h+h^2+6+3h-4-6}{h}-7\right| \\
&= \left|\frac{h^2+7h}{h}-7\right| \\
&= |h+7-7| = |h| = |h-0| < \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen väite pätee. Tuloksemme tarkoittaa, että funktion f erotusosamäärällä on raja-arvo pisteessä $x = 2$ eli funktio f on derivoituva kohdassa $x = 2$. Lisäksi tulos kertoo, että $f'(2) = 7$.

E8. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Tiedetään, että $x_n \to \infty$, joten löytyy sellainen $K_x \in N$ jolle pätee: kun $n > K_x$, niin $x_n > M$, jossa $M \in \mathbb{R}$. Samalla päättelyllä pätee myös: $x_n > M + 1/2 - a$, missä $a \in \mathbb{R}$.

Edelleen tiedetään: $y_n \to a \in \mathbb{R}$, joten löytyy sellainen $K_y \in \mathbb{N}$ jolle pätee: kun $n > K_x$, niin $|y_n - a| < 1/2 \overset{IAL}{\Leftrightarrow} y_n > a - 1/2$.

Valitaan $K = max\{K_x, K_y\}$. Nyt kun $n > K$, niin $x_n + y_n > M + 1/2 - a + a - 1/2 = M$. Siis $x_n + y_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.