MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Extemporetehtävät 3
26.9.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Jere Nivukoski ja Paula Saarinen)

E1. Osoita väite $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ todeksi.

Ratkaisu. Merkitään $x_n = (n+1)/(n+2)$. Nyt halutaan osoittaa, että $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 1$. Tämä tarkoittaa, että on löydettävä sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n - 1| < \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tarkastellaan lauseketta $|x_n - 1|$ ja huomataan, että

$$|x_n - 1| = |\frac{n+1}{n+2} - 1| = |\frac{n+1-n-2}{n+2}| = |\frac{1}{n+2}| = \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n}.$$

Halutaan, että $\epsilon > 1/n$. Tämä tarkoittaa sitä, että on oltava $n > 1/\epsilon$. Nyt voidaan huomata, että $|x_n - 1|$ saadaan pienemmäksi kuin ϵ valitsemalla kynnysluvuksi n_ϵ jokin luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $1/\epsilon$. Tämän pohdinnan myötä voidaan koota todistus alkuperäiselle väitteelle.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja n_ϵ sellainen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $1/\epsilon$. Jos nyt $n > n_\epsilon$, niin

$$|x_n - 1| = |\frac{n+1}{n+2} - 1| = |\frac{n+1-n-2}{n+2}| = |\frac{1}{n+2}| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Näin ollen $\lim_{x\to\infty} x_n = 1$.

E2. Osoita väite $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 2$ epätodeksi.

Ratkaisu. Tehtävän E1 nojalla lukujonon raja-arvon yksikäsitteisyyteen nojaten, voidaan päätellä, että väite on epätosi.

Todistetaan väite epätodeksi kuitenkin myös määritelmän nojalla.

$$|\frac{n+1}{n+2} - 2| = |\frac{n+1-2n-4}{n+2}| = |\frac{-n-3}{n+2}|.$$

Koska $n \geq 1$, niin $|-n-3| = n+3$ ja $3n > n+2$. Näin ollen

$$|\frac{-n-3}{n+2}| = \frac{n+3}{n+2} \geq \frac{n}{n+2} \geq \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}.$$

On siis näytetty, että

$$|\frac{n+1}{n+2} - 2| \geq \frac{1}{3}.$$

Siispä, jos $\epsilon = 1/3$, ei ole olemassa sellaista luonnollista lukua n_ϵ, että $|\frac{n+1}{n+2} - 2| < \epsilon$ aina kun $n > n_\epsilon$. Näin ollen väite on epätosi.

E3 Osoita väite $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+3} = 0$ todeksi.

Ratkaisu. Merkitään $x_n = (n+3)/(n^3+3)$. Nyt halutaan osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Tämä tarkoittaa, että on löydettävä sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n| < \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tarkastellaan lauseketta $|x_n|$ ja havaitaan, että

$$|x_n| = |\frac{n+3}{n^3+3}| = \frac{n+3}{n^3+3} \leq \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{4n}{n^3} \leq \frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n}.$$

Halutaan, että $\epsilon > 4/n$. Tämä tarkoittaa sitä, että on oltava $n > 4/\epsilon$. Nyt voidaan huomata, että $|x_n|$ saadaan pienemmäksi kuin ϵ valitsemalla kynnysluvuksi n_ϵ jokin luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $4/n$. Tämän pohdinnan myötä voidaan koota todistus alkuperäiselle väitteelle.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja n_ϵ sellainen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $4/\epsilon$. Jos nyt $n > n_\epsilon$, niin

$$|x_n| = |\frac{n+3}{n^3+3}| = \frac{n+3}{n^3+3} \leq \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{4n}{n^3} \leq \frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n} < \frac{4}{n_\epsilon} < \frac{4}{4/\epsilon} = \epsilon.$$

Näin ollen $lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

E4. Onko olemassa $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$?

Ratkaisu. Näyttäisi siltä, että kun luku n kasvaa rajatta, $\sqrt{1+1/n}$ lähestyy lukua 1. Pyritään todistamaan tämä.

Merkitään $x_n = \sqrt{1+1/n}$. Nyt halutaan osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Tämä tarkoittaa, että on löydettävä sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n - 1| < \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tarkastellaan lauseketta $|x_n - 1|$ ja huomataan, että

$$|x_n - 1| = |\sqrt{1+1/n} - 1| = |\frac{1+1/n-1}{\sqrt{1+1/n}+1}| = |\frac{1/n}{\sqrt{1+1/n}+1}|.$$

Koska $n \geq 1$, on myös totta, että $1/n > 0$ ja $\sqrt{1+1/n}+1 > 0$. Näin ollen

$$|\frac{1/n}{\sqrt{1+1/n}+1}| = \frac{1/n}{\sqrt{1+1/n}+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Halutaan, että $1/n < \epsilon$. Tämä tarkoittaa sitä, että on oltava $n > 1/\epsilon$. Nyt voidaan huomata, että $|x_n - 1|$ saadaan pienemmäksi kuin ϵ valitsemalla kynnysluvuksi n_ϵ jokin luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $1/\epsilon$. Tämän pohdinnan myötä voidaan koota todistus alkuperäiselle väitteelle.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja n_ϵ sellainen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin $1/\epsilon$. Jos nyt $n > n_\epsilon$, niin

$$|x_n - 1| = |\sqrt{1+1/n} - 1| = |\frac{1+1/n-1}{\sqrt{1+1/n}+1}| = |\frac{1/n}{\sqrt{1+1/n}+1}|$$

$$= \frac{1/n}{\sqrt{1+1/n}+1} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

Näin ollen $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

***E*5**. Onko olemassa $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$?

Ratkaisu. Pyritään muokkaamaan lauseke muotoon, josta mahdollinen raja-arvo tai hajaantuminen olisi mahdollista havaita. Huomataan, että

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Näyttäisi siltä, että nimittäjä kasvaa rajatta, kun $n \to 1$. Näin ollen näyttäisi siis siltä, että $1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \to 0$, kun $n \to \infty$. Pyritään siis todistamaan, että $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sellainen, että $n > 1/\epsilon^2$. Nyt

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0| = |\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}| = |\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}| = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{1/\epsilon^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon^2}}{\sqrt{1}} = \epsilon$$

Kun $n > n_\epsilon$. Siispä $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

***E*6**. Etsi monisteesta lause, jonka perusteella jono $(0,1,0,1,\ldots)$ hajaantuu.

Ratkaisu. Monisteen lause 4.2 vaikuttaa lupaavalta: Olkoon (x_n) suppeneva jono. Tällöin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - x_m| < \epsilon$, kun $n, m > n_\epsilon$.

Tiedetään, että $|x_n - x_{n+1}| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, joten ei ole olemassa sellaista $n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ että $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2}$, kun $n+1, n > n_{\frac{1}{2}}$. Joten (x_n) ei voi olla suppeneva jono.

***E*7**. Todista edellisessä tehtävässä mainittu lause. Saat käyttää monistetta vapaasti.

Ratkaisu. Todistettava lause on siis
Olkoon (x_n) suppeneva jono. Tällöin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - x_m| < \epsilon$, kun $n, m > n_\epsilon$.
Todistus. Oletetaan (x_n) suppenee kohti a:ta, eli $a = \lim_{n\to\infty}(x_n)$ ja oletetaan, että $\epsilon > 0$. Tällöin raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.e.

$$|x_n - a| < \epsilon/2, \qquad \text{kun } n > n_\epsilon$$

Olkoon $n, m > n_\epsilon$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

***E*8**. Voiko jonolla olla useita raja-arvoja? Todistus!

Ratkaisu. Ei. Lukujonolla voi olla vain yksi raja-arvo.
Todistus Oletetaan, että lukujonolla olisi kaksi raja-arvoa, eli $x_n \to a$ ja $x_n \to b$. Ja nyt haluamme osoittaa, että $a = b$.
Tehdään tälle vastaväite: $a \neq b$.
Merkitään $\epsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$. Tällöin on olemassa $n_\epsilon^{'}$ s.e.

$$|x_n - a| < \epsilon \qquad \text{kun } n > n_\epsilon^{'}$$

ja tällöin on olemassa $n_\epsilon^{''}$ s.e.

$$|x_n - b| < \epsilon \qquad \text{kun } n > n_\epsilon^{''}.$$

Valitaan $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon^{'}, n_\epsilon^{''}\}$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla, kun $n > n_\epsilon$

$$3\epsilon = |a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,,$$

joten 3<2, RR. Siis vastaväite on väärä ja väitös on oikea.