MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex temporetehtävät 2
19.9.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Asko Linnakoski ja Esko Heinonen)

Huom: Joissakin tehtävissä on hyötyä tiedoista $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, jne. (Nämä voi tarkistaa suorittamalla kertolaskut.)

Tällä viikolla opetellaan itseisarvon määritelmää ja itseisarvon käyttöä arvioinnissa.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|x-7| < 2$? Arvaa ensin vastaus ajattelemalla erotuksen itseisarvoa etäisyytenä. Todista sitten väite itseisarvolemman avulla ($|x| < a$ jos ja vain jos $-a < x < a$;kun a on positiivinen.) Anna vastaus välin muodossa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti!

Ratkaisu: $|x-7| < 2$ $(2 > 0)$ $\iff -2 < x-7 < 2 \iff 5 < x < 9$. Näin ollen $x \in]5, 9[$. Kuvan piirtäminen jätetään lukijalle.

E2. Oletetaan, että $h > 0$. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|x-7| < h$? Anna vastaus välin muodossa.

Ratkaisu: $|x-7| < h$, $h > 0$. IAL: $-h < x-7 < h \iff -h+7 < x < h+7$. Näin ollen $x \in]-h+7, h+7[$.

E3. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|2x-3| < 1$? Anna vastaus välin muodossa. Muuta epäyhtälö ensin muotoon $|x-a| < b$.

Ratkaisu: Muutetaan epäyhtälö ensin kysyttyyn muotoon: $|2x-3| < 1 \iff 2|x-3/2| < 1 \iff |x-3/2| < 1/2$. Nyt IAL: $-1/2 < x - 3/2 < 1/2 \iff 1 < x < 2$. Näin ollen $x \in]1, 2[$.

E4. Mitkä reaaliluvut toteuttavat molemmat epäyhtälöt $|x+2| < 3$ ja $|x-2| < 3$? Sovella itseisarvolemmaa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti.

Ratkaisu: Sovelletaan itseisarvolemmaa molempiin yhtälöihin. Ensimmäiseen $|x+2| < 3 \iff -3 < x+2 < 3 \iff -5 < x < 1$. Ja toiseen $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5$. Näin ollen $x \in]-5,1[\cap]-1,5[=]-1,1[$.

E5. (a) Etsi sellainen luku $K > 0$, että kaikilla välille $]0,2[$ kuuluvilla luvuilla x pätee $|x^3-1| \leq K|x-1|$.

(b) Onko olemassa sellaista positiivista lukua h, että $|x^3-1| < 7^{-77777}$ aina kun $|x-1| < h$?

Ratkaisu: (a) Huomataan, että x^3-1 voidaan kirjoittaa muodossa $(x-1)(x^2+x+1)$. Lisäksi, kun $x \in]0,2[$, niin $1 < x^2+x+1 < 2^2+2+1 = 7$. Sovelletaan nyt näitä sekä tietoa $|xy| = |x||y|$ tehtävän itseisarvoon:

$$|x^3-1| = |(x-1)(x^2+x+1)| = |x-1||x^2+x+1| < 7|x-1|.$$

Luvuksi K voidaan siis valita $K = 7$.

(b) Ehto $x \in]0,2[$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $|x-1| < 1$. Etsitään siis lukua $0 < h < 1$, jolloin kaikille ehdon $|x-1| < h$ toteuttaville luvuille on voimassa a-kohdan arvio. Kun haluamme saada erotuksen $|x^3-1|$ pienemmäksi kuin 7^{-77777}, niin riittää saada $7|x-1|$ pienemmäksi kuin 7^{-77777}. Valitaan siis $h = \frac{1}{7} \cdot 7^{-77777}$. Tällöin pätee: jos $|x-1| < h$, niin

$$|x^3-1| < 7|x-1| < 7h = 7^{-77777}.$$

E6. (a) Minkä välin muodostavat ne reaaliluvut x, joiden likiarvo kahden desimaalin tarkuudella on 23,14. Muistele koulun pyöristyssääntöjä.

(b) Oletetaan, että $|x-e^\pi| < 2^{-1}10^{-1}$. Mitä tiedät tämän nojalla luvun x desimaalikehitelmästä?

(c) Entä jos $|x-e^\pi| < 2^{-1}10^{-23}$?

(Luvun e^π kehitelmä alkaa näin:

23,14069263277926900572908636794854738026610624260021.)

Ratkaisu: (a) Reaaliluvut $23,14 \pm \varepsilon$ pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella lukuun $23,14$, jos $0 \leq \varepsilon < 0,005$. Lisäksi luku $23,135$ pyöristyy lukuun $23,14$. Kysytty väli on siis $\{23,135\} \cup (23,14-0,005; 23,14+0,005) = [23,135; 23,145[$.

(b) Kirjoitetaan annettu tieto muodossa $e^\pi - 0,05 < x < e^\pi + 0,05$. Nyt hyödyntämällä luvun e^π desimaalikehitelmää voidaan sanoa, että $x >$

$e^\pi - 0,05 > 23,14 - 0,05 = 23,09$ ja $x < e^\pi + 0,05 < 23,141 + 0,05 = 23,191$. Huomataan myös, että lukujen x ja e^π desimaalikehitelmissä ei tarvitse olla samoja desimaaleja.

(c) Jos olisimme edellisessä kohdassä käyttäneen luvun 0,05 sijasta lukua $0,005 = 2^{-1} \cdot 10^{-2}$, olisimme huomanneet, että $23,135 < x < 23,147$, joten luvun x desimaalikehitelmässä on vähintään yksi sama desimaali kuin luvun e^π desimaalikehitelmässä. Vastaavasti voidaan todeta, että lukujen x ja e^π desimaalikehitelmissä ensimmäiset 22 desimaalia ovat samat.

E7. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikille välille $[1, 3]$ kuuluvilla x pätee $|2x^2 + x - 10| \leq K|x - 2|$. Huom: lausekkeen $2x^2 - x$ arvo kohdassa $x = 2$ on 10. Siksi kannattaa lähteä liikkeelle näin: $(2x^2+x)-10 = (2x^2+x)-(8+2) = (2x^2 - 8) + (x - 2)$.

Ratkaisu: Lähdetään muokkaaman yhtälön vasenta puolta vihjeen mukaisesti:

$$\begin{aligned} |2x^2 + x - 10| &= |(2x^2 - 8) + (x - 2)| = |2(x^2 - 4) + (x - 2)| \\ &= |2(x - 2)(x + 2) + (x - 2)| = |x - 2|\,|2(x + 2) + 1|. \end{aligned}$$

Arvioidaan seuraavaksi lauseketta $|2(x + 2) + 1|$: Oletuksesta $1 \leq x \leq 3$ seuraa, että

$$|2(x + 2) + 1| = |2x + 5| \leq |2 \cdot 3 + 5| = 11.$$

Olemme siis perustelleet, että kaikilla $x \in [1, 3]$ pätee

$$|2x^2 + x - 10| = |2x + 5|\,|x - 2| \leq 11|x - 2|,$$

joten luvuksi K kelpaa esimerkiksi $K = 11$.

E8. Etsi luku $K > 0$, jolle kaikille välille $[0, 2]$ kuuluvilla x pätee $|(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2))| \leq K|x - 1|$. Huom: lausekkeen $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ arvo kohdassa $x = 1$ on -2. Katso tehtävien alussa olevia kaavoja...

Ratkaisu: Aloitetaan taas edellisen tehtävän tapaan muokkaamalla yhtälön vasenta puolta:

$$\begin{aligned} |(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2)| &= |(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-5 + 3)| \\ &= |(x^3 - 2x^2 + 1) + 3(x - 1)| \\ &\leq |x^3 - 2x^2 + 1| + 3|x - 1|. \end{aligned}$$

Huomataan, että lausekkeen $x^3 - 2x^2$ arvo kohdassa $x = 1$ on -1. Lähdetään siis arviomaan lauseketta tämän tiedon perusteella:

$$\begin{aligned}
|x^3 - 2x^2 + 1| &= |x^3 - 2x^2 - (-1)| = |x^3 - 2x^2 - (1-2)| \\
&= |(x^3 - 1) - 2(x^2 - 1)| \\
&= |(x-1)(x^2 + x + 1) - 2(x+1)(x-1)| \\
&\leq |x^2 + x + 1||x-1| + |-2(x+1)||x-1|
\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä edelliset arviot ja soveltamalla tietoa $x \in [0, 2]$ saadaan alkuperäiselle lausekkeelle arvio:

$$\begin{aligned}
|(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2))| &\leq |x^2 + x + 1||x-1| + |-2(x+1)||x-1| + 3|x-1| \\
&\leq |2^2 + 2 + 1||x-1| + |-2(2+1)||x-1| + 3|x-1| \\
&= 7|x-1| + 6|x-1| + 3|x-1| = 16|x-1|,
\end{aligned}$$

joten kysytyksi luvuksi K kelpaa $K = 16$.