Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysi I
Ex tempore -tehtävät 1
12.9.2011 alkavalle viikolle
Malliratkaisuja (Joni Luhtalampi, Lauri Sankari)

Lue kurssin kotisivulta ohjeet koti- ja ex tempore -tehtävistä sekä siitä, miten pää- ja sivuaineopiskelijat saavat harjoituksista lisäpisteitä!

Malliratkaisuissa mainitut aksioomat vastaavat luentomonisteen sivun 4 otsikointia ja numerointia.

Aluksi esitellään muistin virkistämiseksi muutama hyödyllinen järjestysaksioomien seuraus, joista on hyötyä tarkasteltaessa epäyhtälöitä:

(O1) $x < y$ jos ja vain jos $y - x > 0$.
(O2) Jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $xz < yz$.
(O3) $x^2 \geq 0$.
(O4) Jos $x > 0$, niin $\frac{1}{x} > 0$
(O5) Jos $0 < x < y$, niin $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

E1. Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$.

Ratkaisu. Edellä esitetyn ominaisuuden (O1) nojalla voidaan tarkastella väitettä muodossa $y^2 - x^2 > 0$. Toisaalta nyt on $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$, missä on $y + x > 0$ oletuksen $x > 0$, $y > 0$ ja järjestysaksioomien (2) ja (3) nojalla ja $y - x > 0$ oletuksen $x < y$ ja ominaisuuden (O1) nojalla. Siis järjestysaksiooman (4) nojalla $(y - x)(y + x) > 0$, joten väite pätee.

E2. Oletetaan, että $1 < x$. Päteekö, että $x^3 < x^7$?

Ratkaisu. Koska $1 < x$, niin erityisesti $x > 0$. Nyt ominaisuuden (O2) nojalla saadaan kertomalla epäyhtälöä $1 < x$ luvulla x uusi epäyhtälö $x < x^2$. Kertomalla tätä epäyhtälöä uudelleen luvulla x saadaan $x^2 < x^3$. Edelleen jatkamalla samalla tavalla saadaan $x^3 < x^4$, $x^4 < x^5$, $x^5 < x^6$ ja $x^6 < x^7$. Nyt järjestysaksiooman (2) nojalla $x^3 < x^7$.

E3. Oletetaan tunnetuksi, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Onko $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Ratkaisu. Reaaliluku on rationaalinen, jos se voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Oletetaan nyt, että $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}$ on rationaalinen, toisin sanoen $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3} = \frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kuten yllä. Nyt kertomalla ristiin saadaan yhtälö $n(\sqrt{2}+1) = m(\sqrt{2}+3)$, jota muokkaamalla saadaan

$$\begin{aligned} & n\sqrt{2} + n = m\sqrt{2} + 3m \\ \Rightarrow \quad & (n-m)\sqrt{2} = 3m - n \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{2} = \frac{3m-n}{n-m}. \end{aligned}$$

Nyt $\sqrt{2}$ on rationaalinen. Toisaalta oletuksen nojalla $\sqrt{2}$ on irrationaalinen, joten saadaan ristiriita. Siis $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}$ ei voi olla rationaalinen ja on siten irrationaalinen.

E4. Osoita, että $\sqrt{7}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus, $\sqrt{7}$ on rationaalinen; siis $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ja lisäksi luvuilla m, n ei ole yhteisiä tekijöitä. Nyt erityisesti $7 = \frac{m^2}{n^2}$, toisin sanoen $m^2 = 7n^2$. Mutta nyt on myös yhtälön oikealla puolella oltava tekijä 7, joten täytyy olla $m = 7k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Sijoittamalla tämä viimeisimpään yhtälöön saadaan $7^2k^2 = 7n^2$, josta jakamalla luvulla 7 saadaan $n^2 = 7k^2$, joten vastaavasti nyt $n = 7l$ jollakin $l \in \mathbb{Z}$. Mutta nyt sekä m että n ovat jaollisia luvulla seitsemän, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa. Siis $\sqrt{7}$ on irrationaalinen.

E5. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{n+1}{n^2+2} < \frac{2}{n}.$$

Ratkaisu. Väitteen osoittamiseksi tarkastellaan epäyhtälön vasemman puolen lauseketta:

$$\frac{n+1}{n^2+2} < \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

missä ensimmäinen arvio perustuu ominaisuuteen (O5),käänteisluvun otto kääntää epäyhtälön suunnan, ja jälkimmäinen siihen, että erityisesti $n \geq 1$. Siis väitetty epäyhtälö pätee.

E6. Onko $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Ratkaisu. Oletetaan, että $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on rationaalinen. Siis $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$. Korottamalla tämä yhtälö puolittain neliöön saadaan

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2},$$

missä $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, sillä $(\sqrt{2}\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2 = 6$ ja $\sqrt{2}\sqrt{3} > 0$ järjestysaksiooman (4) nojalla.

Ratkaisemalla yhtälöstä $\sqrt{6}$ saadaan $\sqrt{6} = \frac{m^2 - 5n^2}{2n^2}$, toisin sanoen $\sqrt{6}$ on rationaaliluku. Kotitehtävässä K4 on kuitenkin osoitettu, että $\sqrt{6}$ on irrationaalinen. Siis $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on irrationaalinen.

E7. Onko $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Ratkaisu. Oletetaan, että $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ on rationaalinen. Siis $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$. Nyt on $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} - \sqrt{2}$. Korottamalla yhtälö puolittain kolmanteen potenssiin saadaan $2 = (\frac{m}{n} - \sqrt{2})^3$. Siis

$$2 = \frac{m^3}{n^3} - 3\sqrt{2}\frac{m^2}{n^2} + 6\frac{m}{n} - 2\sqrt{2},$$

josta

$$\sqrt{2} = \frac{2n^3 - m^3 - 6mn^2}{-3m^2n - 2n^3}.$$

Siis $\sqrt{2}$ on rationaaliluku. Luennoilla on kuitenkin osoitettu, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Siis $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ ei voi olla rationaalinen, joten se on irrationaalinen.

E8. Oletetaan, että $x < y$. Osoita, että

$$x < \frac{x + y}{2} < y.$$

(Lisäkysymyksiä, joihin palataan myöhemmin: Onko kahta vierekkäistä reaalilukua (joiden välissä ei ole reaalilukuja)? Onko kahden rationaaliluvun välissä aina rationaaliluku? Onko kahden reaaliluvun välissä aina rationaaliluku? Onko kahden reaaliluvun välissä aina irrationaaliluku?)

Ratkaisu. Lisätään oletuksen epäyhtälöön puolittain luvut x ja y, jolloin saadaan järjestysaksiooman (2) nojalla kaksi epäyhtälöä

$$2x < x + y \text{ ja } x + y < 2y.$$

Jakamalla nämä puolittain saadaan $x < \frac{x+y}{2}$ ja $\frac{x+y}{2} < y$, jotka yhdistämällä seuraa väite.

Erityisesti tästä tuloksesta seuraa suoraan, ettei löydy kahta vierekkäistä reaalilukuja, sillä kahden reaaliluvun välistä löytyy aina lukujen keskiarvo. Lisäksi kahden rationaaliluvun keskiarvo on rationaalinen, joten kahden rationaaliluvun välissä on aina vähintään yksi rationaaliluku.