MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Kotitehtävät 5
10.10.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Asko Linnakoski ja Esko Heinonen)

K1. Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}(2n+3)=\infty.$$

Ratkaisu: Määritelmän nojalla lukujono kasvaa rajatta, jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ löytyy indeksi n_M siten, että $x_n > M$, kun $n > n_M$. Osoitetaan, että tällainen indeksi löytyy.

Olkoon $M > 0$. Tällöin kaikilla $n > n_M = M$ on
$$2n+3 \geq 2n \geq n > M,$$
joten määritelmän nojalla kyseinen lukujono kasvaa rajatta.

K2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. Voidaanko tulos tulkita tietona erään funktion jatkuvuudesta? Minkä ja missä kohdassa?

Ratkaisu: Funktion raja-arvon määritelmän nojalla funktiolla on raja-arvo pisteessä 1, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että
$$|x^2-1| < \varepsilon,$$
kun $0 < |x-1| < \delta$. Käytännössä jokaisella ε täytyy löytää sopiva pieni väli, joka ympäröi lukua 1. Osoitetaan nyt, että tällainen väli löydetään.

Oletetaan, että $0 < x < 2$. Tällöin $|x+1| < 3$ ja
$$|x^2-1| = |x+1||x-1| < 3|x-1|.$$
Nyt voimme määrätä sopivan ehdon luvulle δ. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Valitaan $\delta = min\{1, \varepsilon/3\}$ ja olkoon $0 < |x-1| < \delta$. Nyt $0 < x < 2$, joten aikaisempi arvio on voimassa, ja
$$|x^2-1| < 3|x-1| < 3\delta \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Jatkuvuuden maaritelmän nojalla funktion f raja-arvo pisteessä x_0 täytyy olla sama kuin funktion f arvo pisteessä x_0 eli $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Tässä tehtävässä funktiomme on $x \overset{f}{\mapsto} x^2$ ja $x_0 = 1$. Koska $f(1) = 1$, niin olemme itse asiassa osoittaneet, että funktio f on jatkuva pisteessä 1.

K3. Osoita, että $5^n \geq 1 + 4n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu: Palautetaan mieleen Bernoullin epäyhtälö ja todistetaan se induktiota käyttämällä.

Bernoullin epäyhtälö: Kun $x \in \mathbb{R}$ ja $x \geq -1$, niin $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että väite pätee kun $n = 1$ (alkuaskel):

$$(1 + x)^1 \geq 1 + x \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 + x,$$

joten väite pätee. Tehdään nyt induktio-oletus ja oletetaan, että väite pätee kun $n = k$. Osoitetaan tämän jälkeen, että väite pätee myös arvolla $n = k+1$.

Kerrotaan induktio-oletus puolittain termillä $1+x$. Tämä voidaan tehdä, sillä $1 + x \geq 0$ ja näin ollen epäyhtälön suunta säilyy. Saadaan

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

Siis väite pätee myös arvolla $n = k + 1$, joten induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla $n = 1, 2, 3 \ldots$ $\square$

Nyt kirjoittamalla tehtävän väite muotoon

$$5^n \geq 1 + 4n \Leftrightarrow (1 + 4)^n \geq 1 + 4n$$

huomataan, että kyseessä on Bernoullin epäyhtälö arvolla $x = 4$, joka tiedetään todeksi.

K4. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{3n + 4} = \infty.$$

Ratkaisu: Muistetaan taas, että määritelmän nojalla lukujono kasvaa rajatta, jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ löytyy indeksi n_M siten, että $x_n > M$, kun $n > n_M$. Osoitetaan, että tällainen indeksi löytyy.

Olkoon $M > 0$. Tällöin kaikilla $n > 7M$ on

$$\frac{n^2+2}{3n+4} \geq \frac{n^2}{3n+4} \geq \frac{n^2}{3n+4n} \geq \frac{n}{7} > \frac{7M}{7} = M.$$

Siis valitsemalla kynnysindeksiksi $n_M = 7M$ pätee ylläoleva epäyhtälö kaikilla $n > n_M$.

K5. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{7n})^n.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa: jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[7]{x_n} \to \sqrt[7]{a}$.

Ratkaisu: Luvun e määritelmä on

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

Kuten tehtävänannossa mainittiin, tutkitaan lukuja $((1+1/7n)^n)^7 = (1+1/7n)^{7n}$. Havaitaan, että jono $(1+1/7n)^{7n}$ on luvun e määrittelevän (suppenevan) jonon osajono. Luentomonisteen lauseen 4.3 nojalla näiden jonojen raja-arvot ovat samat. Siis

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{7n})^{7n} = e$$

Näin ollen

$$(1+\frac{1}{7n})^n = \sqrt[7]{((1+\frac{1}{7n})^n)^7} = \sqrt[7]{(1+\frac{1}{7n})^{7n}} \to \sqrt[7]{e}\ ,$$

kun n $\to \infty$.

K6. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

Voidaanko tulos tulkita tietyn funktion derivoituvuutena? Minkä ja missä kohdassa?

Ratkaisu: Oletetaan $x \neq 4$ ja $3 < x < 5$. Lähdetään tutkimaan erotusta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}-\frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4(\sqrt{x}-2)}{4(x-4)}-\frac{x-4}{4(x-4)}\right| = \left|\frac{-x+4\sqrt{x}-4}{4(x-4)}\right| \\
&= \left|\frac{-(\sqrt{x}-2)^2}{4(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-2}{4(\sqrt{x}+2)}\right| \\
&= \left|\frac{x-4}{4(\sqrt{x}+2)^2}\right| < |x-4|.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$, oletetaan $0 < |x-4| < \delta$. Tällöin

$$\left|\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}-\frac{1}{4}\right| < |x-4| < \delta \leq \varepsilon$$

Kyllä voidaan, nimittäin funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ja kohdassa $x_0 = 4$, sillä funktio on derivoituva kohdassa x_0, jos erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa x_0.

K7. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

Ratkaisu: Käytetään Bernoullin epäyhtälöä: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ja olkoon $p \in \mathbb{N}$. Tällöin saadaan

$$2^{2p} = (1+1)^{2p} = ((1+1)^p)^2 \geq (1+p\cdot 1)^2 = (1+p)^2$$

ja

$$2^{2p+1} = (1+1)^{2p+1} = 2((1+1)^p)^2 \geq 2(1+p\cdot 1)^2 = 2(1+p)^2$$

Jakamalla ensimmäinen epäyhtälö luvulla $2p$ ja jälkimmäinen luvulla $2p+1$ saadaan

$$\frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p} \quad ja \quad \frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1}.$$

Näitä hyödynnetään lukojonon jäsenien arvioinnissa alhaalta ylöspäin. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Nyt n on parillinen, $n = 2p$ tai n on pariton, $n = 2p+1$. Jos $n = 2p$ niin

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p} = \frac{p^2+2p+1}{2p} \geq \frac{p}{2}.$$

Jos $n = 2p + 1$ niin

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1} = \frac{(1+p)^2}{p+\frac{1}{2}} \geq \frac{p^2+2p+1}{2p} \geq \frac{p+1}{2} \geq \frac{p+\frac{1}{2}}{2}.$$

Näiden avulla voimme koota varsinaisen todistuksen. Olkoon $M > 0$ ja $n > 4M$. Kun n on parillinen, niin $n = 2p$ ja täten $p > 2M$. Nyt on voimassa

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{p}{2} > \frac{2M}{2} = M$$

Kun n on pariton, niin $n = 2p + 1$ ja täten $p > 2M - 1/2$. Nyt pätee

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq \frac{p+\frac{1}{2}}{2} > \frac{2M - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = M.$$

K8. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

(a) Oletetaan, että $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > \frac{a}{2}$ kun n on kyllin suuri. (Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = \infty$, kun $a > 0$.)

(b) Oletetaan, että $a < 0$.Osoita, että $x_n y_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$. Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = -\infty$, kun $a < 0$

(c) Onko sääntöä $0\infty = \ldots$?

Ratkaisu: (a) Oletetaan, että $a > 0$ ja olkoon $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$.

Olkoon $\varepsilon = a/2$. Koska $y_n \to a$, kun $n \to \infty$, niin on olemassa sellainen $K_1 \in \mathbb{N}$, siten että

$$|y_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2},$$

kun $n > K_1$. Itseisarvolemmaa hyödyntämällä:

$$|y_n - a| < \frac{a}{2} \iff -\frac{a}{2} < y_n - a < \frac{a}{2} \iff \frac{a}{2} < y_n < \frac{3a}{2},$$

kun $n > K_1$.

Koska $x_n \to \infty$, niin on olemassa sellainen $K_2 \in \mathbb{N}$, siten että $x_n > 2M/a$ kaikilla $n > K_2$. Jos nyt $n > \max\{K_1, K_2\}$, niin

$$x_n y_n > \frac{2M}{a} \cdot \frac{a}{2} = M.$$

Siis $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

(b) Oletetaan, että $a < 0$ ja olkoon $M < 0$, $M \in \mathbb{R}$.

Olkoon $\varepsilon = -a/2$. Koska $y_n \to a$, kun $n \to \infty$, niin on olemassa sellainen $K_1 \in \mathbb{N}$, siten että

$$|y_n - a| < \varepsilon = -\frac{a}{2},$$

kun $n > K_1$. Itseisarvolemmaa hyödyntämällä

$$|y_n - a| < \varepsilon = -\frac{a}{2} \iff \frac{a}{2} < y_n - a < -\frac{a}{2} \iff \frac{3a}{2} < y_n < \frac{a}{2},$$

kun $n > K_1$.

Koska $x_n \to \infty$, niin on olemassa sellainen $K_2 \in \mathbb{N}$, siten että $x_n > 2M/a$ kaikilla $n > K_2$. Jos nyt $n > \max\{K_1, K_2\}$, niin

$$x_n y_n < \frac{2M}{a} \cdot \frac{a}{2} = M$$

Siis $x_n y_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$.

(c) Valitettavasti tällaista sääntöä ei ole olemassa.